Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 7
Abgabe: Mittwoch 21.12.2022

Liebe Studierende,
diese Woche werden die Vorlesungen und Übungen evaluiert und wir möchten Sie bitten, uns hier ein Feedback zu geben. Bitte evaluieren Sie jede Veranstaltung nur einmal. Am Montag (12. Dezember), haben wir in der Vorlesung bereits die Vorlesung evaluiert. Am Freitag (16. Dezember) werden wir in den Theorie-Übungen die Theorie-Übungen evaluieren. Falls Sie zu einer dieser Veranstaltungen diese Woche nicht gehen konnten, finden Sie im Folgenden die Links, unter denen Sie die Veranstaltungen evaluieren können:

- Integrierte Vorlesung: `https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=4QCL9`
- Theorie-Übung: `https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=MKMF2`

Wir bedanken uns für Ihre Teilnahme.

1. Eigenwerte und Eigenvektoren — 6 Punkte

Die Matrix $\mathbf{A}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

wobei a, b und c Konstanten ungleich Null seien.

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i von $\mathbf{A}$, indem Sie die Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

verwenden, wobei $\mathbb{I}$ die 3×3 Einheitsmatrix ist.

(b) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Eigenwerte μ_i von $\mathbf{A}^n,\ n \geq 1$.

(c) [1 Punkt] Die Spur $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ von $\mathbf{A}$ wird definiert als

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{ii}.$$

Welcher Zusammenhang haben $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A})$ mit den in Teil (a) berechneten Eigenwerten?

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ von $\mathbf{A}$.

2. Gauß-Integral 8 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe das folgende Integral

$$I[a,b] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-ax^2+bx}.$$

(a) [3 Punkte] Zeigen Sie

$$I[a,0] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Verwenden Sie die Substitution $x(r,\phi) = r\cos(\phi), y(r,t) = r\sin(\phi)$ und die dafür gültige Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, f(x,y) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}r \, r \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, f(r,\phi).$$

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie die Identität

$$I[a,b] = I[a,0] \cdot \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}.$$

(c) [3 Punkte] Zeigen Sie mithilfe dieser Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-ax^2} x^n = I[a,0] \cdot \begin{cases} \frac{1}{(2a)^{n/2}} \prod\limits_{i=1}^{n/2} (2i-1) & \text{n gerade} \\ 0 & \text{n ungerade} \end{cases}$$

Hinweis: Die Notation $\prod\limits_{i=1}^{n/2} (2i-1)$ *indiziert das Produkt aller ungeraden Zahlen bis* n. *Verwenden Sie zur Berechnung eine Taylorentwicklung und leiten Sie Term für Term ab.*

3. Iterierte Funktionen 4 Punkte

Gegeben seien zwei reele Folgen $x_t, y_t \in \mathbb{R}$, rekursiv definiert durch

$$x_{t+1}(x_t) = \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x_t), \qquad y_{t+1}(y_t) = \frac{K}{2\pi}\cos(2\pi y_t)$$

wobei K ein reeler Kontrollparameter sei.

(a) [2 Punkte] Finden Sie den Fixpunkt x der Folge x_t, definiert durch $x_{t+1}(x) = x$. Angenommen, Sie führten also mit Ihrem Taschenrechner und einem beliebigen Anfangswert eine ausreichend häufig iterierte Berechnung der Sinusfunktion durch, welches Ergebnis würden Sie erwarten?

(b) [1 Punkt] Simulieren Sie mit dem Jupyter-Notebook die Entwicklung des durch y_t beschriebenen Systems für $y_0 = 0.74$, sowie für $y_0 = 0.8$ für jeweils 20 Schritte. Setzen Sie $K = 2\pi$.

(c) [1 Punkt] Plotten Sie das Bifurkationsdiagramm für y_t für $y_0 = 0.1, 1 \leq K \leq 2.1$.