

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 7

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 21.12.2022**1. Eigenwerte und Eigenvektoren**

6 Punkte

Die Matrix $\mathbf{A}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

wobei a, b und c Konstanten ungleich Null seien.(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i von $\mathbf{A}$, indem Sie die Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

verwenden, wobei $\mathbb{I}$ die 3×3 Einheitsmatrix ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda \mathbb{I} &= \begin{pmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & c - \lambda \end{pmatrix} \\ \implies \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) &= (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) \\ &= 0 \\ \implies \lambda_1 &= a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c. \end{aligned}$$

(b) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Eigenwerte μ_i von $\mathbf{A}^n$, $n \geq 1$.Für die entsprechenden Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{v}^i &= \lambda_i \mathbf{v}^i \\ \implies \mathbf{A}^n \mathbf{v}^i &= \lambda_i^n \mathbf{v}^i \\ \implies \mu_i &= \lambda_i^n. \end{aligned}$$

(c) [1 Punkt] Die Spur $\text{Tr}(\mathbf{A})$ von $\mathbf{A}$ wird definiert als

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{ii}.$$

Welchen Zusammenhang haben $\text{Tr}(\mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A})$ mit den in Teil (a) berechneten Eigenwerten?

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_i^3 \lambda_i, \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_i^3 \lambda_i.$$

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ von $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{v}^i &= \lambda_i \mathbf{v}^i \\ \implies \mathbf{v}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Gauß-Integral

8 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe das folgende Integral

$$I[a, b] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx}.$$

(a) [3 Punkte] Zeigen Sie

$$I[a, 0] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Wir nutzen

$$(I[a, 0])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2 + y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr \frac{1}{-2a} \frac{de^{-ar^2}}{dr} = \frac{\pi}{a}$$

Wir ziehen die positive Wurzel, da der Integrand immer eine positive Fläche mit der x -Achse einschließt.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie die Identität

$$I[a, b] = I[a, 0] \cdot e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

Durch die Ersetzung $x \rightarrow x - \frac{b}{2a}$ folgt

$$I[a, b] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a(x - \frac{b}{2a})^2 - b(x - \frac{b}{2a})} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + \frac{b^2}{4a}}.$$

(c) [3 Punkte] Zeigen Sie mithilfe dieser Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} x^n = I[a, 0] \cdot \begin{cases} \frac{1}{(2a)^{n/2}} \prod_{i=1}^{n/2} (2i-1) & \text{n gerade} \\ 0 & \text{n ungerade} \end{cases}$$

Allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{-ax^2} = \frac{d^n I[a, b]}{db^n} \Big|_{b=0} = I[a, 0] \cdot \frac{d^n}{db^n} e^{\frac{b^2}{4a}} \Big|_{b=0}$$

Wir entwickeln $e^{\frac{b^2}{4a}}$ in eine Taylorreihe und erhalten

$$e^{\frac{b^2}{4a}} = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{b^2}{4a} \right)^n = \sum_n a_n$$

Wegen beliebig oft stetiger Differenzierbarkeit dürfen wir Term für Term ableiten. Es gilt

$$\frac{d^m}{db^m} a_n = \frac{1}{n!} \frac{b^{2n-m}}{(4a)^n} \prod_{i=0}^m (2n-i)$$

für $m \leq n$.

Auswertung bei $b = 0$ zeigt, dass der einzige Beitrag durch einen einzelnen Term a_n mit $m = 2n$ gegeben ist durch

$$\frac{d^{2n}}{db^{2n}} a_n = \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(4a)^n} = \frac{1}{(2a)^n} \prod_{i=1}^n (2i-1),$$

wobei für $m = 2n + 1$ alle Terme verschwinden. Die in der Aufgabenstellung geforderte Form erhält man durch die Substitution $n \rightarrow n/2$.

3. Iterierte Funktionen

4 Punkte

Gegeben seien zwei reelle Folgen $x_t, y_t \in \mathbb{R}$, rekursiv definiert durch

$$x_{t+1}(x_t) = \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_t), \quad y_{t+1}(y_t) = \frac{K}{2\pi} \cos(2\pi y_t)$$

wobei K ein reeller Kontrollparameter sei.

- (a) [2 Punkte] Finden Sie den Fixpunkt x der Folge x_t , definiert durch $x_{t+1}(x) = x$.

Der Fixpunkt ist $x = 0$, da $\sin(0) = 0$. Iterierte Berechnung lässt den Wert also zu 0 fließen.

Die Jupyter-Notebook-Lösungen sind wie immer im Muster zu finden (jeweils 1 Punkt).

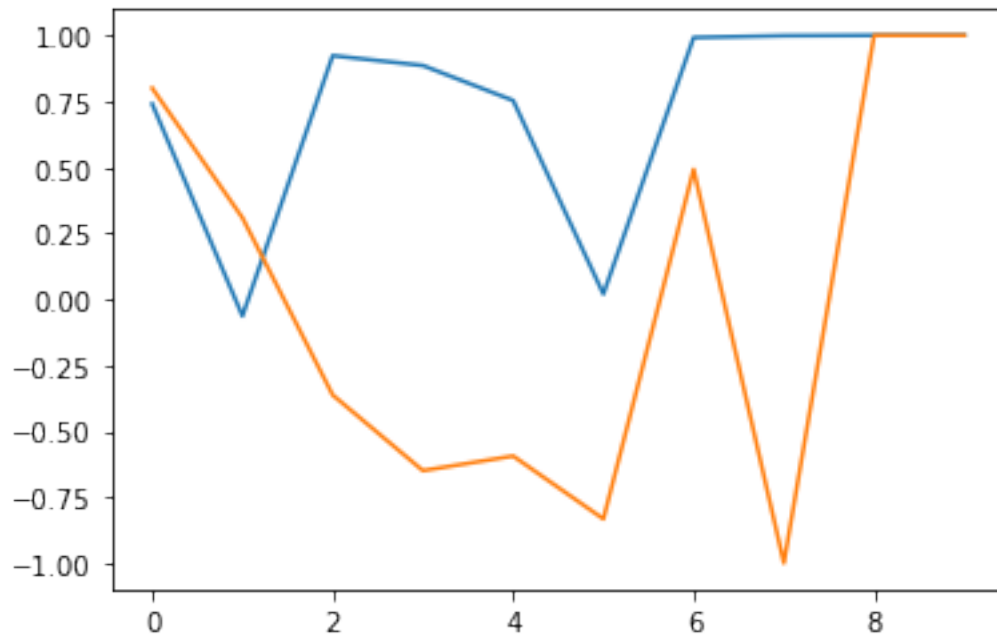
blatt07_muster

May 10, 2023

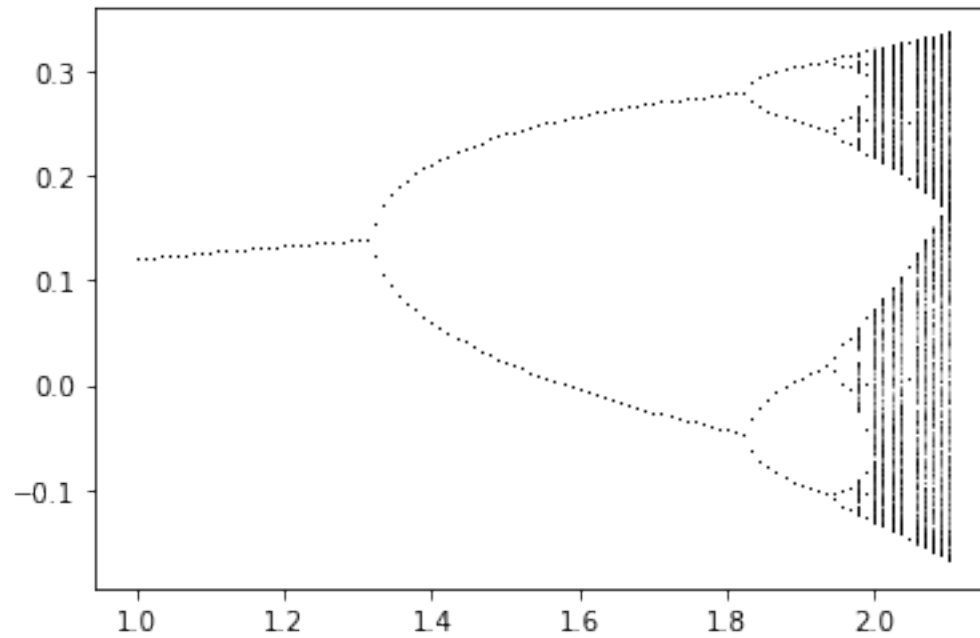
```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: def circle_map(K, y):
return K/(2*np.pi)*np.cos(2*np.pi*y)
```

```
[3]: fig, ax = plt.subplots(1,1)
N_SIM = 10
for y0 in [0.74, 0.8 ]:
    y = np.zeros(N_SIM)
    y[0] = y0
    for t in range(N_SIM-1):
        y[t+1] = circle_map( 2*np.pi, y[t])
    ax.plot(np.arange(N_SIM), y)
```



```
[6]: fig, ax = plt.subplots(1,1)
K = np.linspace(1, 2.1, 100)
N_K = K.size
y = np.ones(N_K)*0.1
N_SIM = 10000
for t in range( N_SIM ):
    y = circle_map(K, y)
    if t > 0.9*N_SIM:
        ax.plot(K, y, ',k', alpha=.25)
```



```
[ ]:
```