Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 8
Abgabe: Mittwoch 11.01.2023

1. Störungsrechnung 5 Punkte

Gegeben sei das folgende Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-ax^2 - gx^4}.$$

Um diesen Ausdruck nicht analytisch berechnen zu müssen, benutzen wir in dieser Aufgabe eine Näherung. Dazu fassen wir g als einen gegenüber a kleinen Störparameter auf. Die Näherung ist gegeben durch die Entwicklung des Integrals als Summe $I_c = \sum\limits_{n=0}^{c} g^n C_n$ bis zu einem Abbruchindex c. Das Problem reduziert sich damit auf das Berechnen der Koeffizienten C_n und eine Wahl für c, sodass $I_c \approx I$.

(a) [2 Punkte] Schreiben Sie I_c mithilfe der Reihendarstellung von e^{-gx^4} und leiten Sie die Koeffizienten C_n her. Verwenden Sie dazu die Identitäten aus Aufgabe 2 von Blatt 7.

(b) [3 Punkte] Das Jupyter-Notebook blatt08_stoerungstheorie.ipynb plottet die exakte Lösung sowie die Näherung in Abhängigkeit von c. Führen Sie das Notebook aus und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Konvergiert I_c für ausreichend große c und wenn ja, für welche Parameterwerte g?
- Wie beeinflussen g und c die Qualität der Näherung?

Hinweis: Es ist keine Änderung am Code notwendig.

2. Delta-Distribution 5 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir folgende Darstellung der Delta-Distribution herleiten

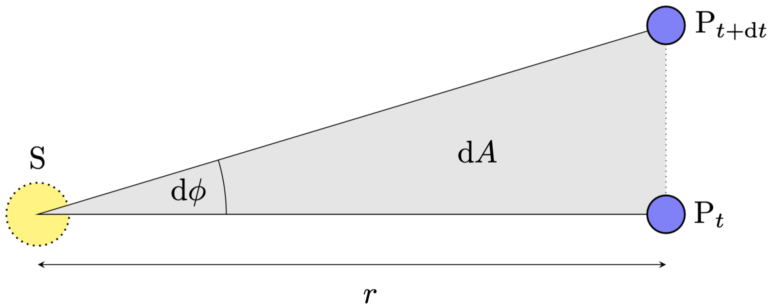
$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x - x_0)}.$$

Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Identität $\delta(x - x_0) = \lim\limits_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}}$.

Hinweis: Finden Sie $f_\sigma(k)$, sodass $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k f_\sigma(k)$. Zweckmäßig ist der Ansatz $f_\sigma(k) = c\mathrm{e}^{-ak^2 + \mathrm{i}bk(x-x_0)}$ mit reelen Parametern a, b, c.

3. Planetenbewegung [7 Punkte]

Ein Planet P der Masse m bewegt sich in einer Umlaufbahn im Abstand $r(t)$ um die Sonne S. Nach einer sehr kleinen Zeit $\mathrm{d}t$ ändert sich der Winkel um $\mathrm{d}\phi$ und der Planet überstreicht eine Fläche $\mathrm{d}A$.



(a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m},$$

wobei L der Drehimpuls des Planeten ist.

(b) Die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ seien gegeben durch

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y.$$

(i) [2 Punkte] Ohne die in der Vorlesung schon angegebenen Gleichungen zu verwenden zeigen Sie, dass

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = a_r\hat{\mathbf{e}}_r + a_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

wobei $\mathbf{r}(t)$ die Position des Planeten relativ zur Sonne ist und

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2), \quad a_\phi = (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}).$$

(ii) [2 Punkte] Zeigen Sie nun, dass $a_\phi = 0$. Was bedeutet dieses Ergebnis physikalisch?