

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 8

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 11.12.2022**1. Störungsrechnung**

5 Punkte

Gegeben sei das folgende Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 - gx^4}.$$

Um diesen Ausdruck nicht analytisch berechnen zu müssen, benutzen wir in dieser Aufgabe eine störungstheoretische Näherung.

- (a) [2 Punkte] Schreiben Sie I_c mithilfe der Reihendarstellung von e^{-gx^4} und leiten Sie die Koeffizienten C_n her. Verwenden Sie dazu die Identitäten aus Aufgabe 2 von Blatt 7.

Wir schreiben

$$I \approx I_c = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \sum_n \frac{(-g)^n x^{4n}}{n!} = \sum_n \frac{(-g)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{4n} e^{-ax^2} \underbrace{\quad}_{\text{Identität aus 7.2.c}} = \sum_n (-g)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(4n-1)!!}{(2a)^{2n} n!}$$

und lesen dann die Koeffizienten ab als $C_n = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(4n-1)!!}{(2a)^{2n} n!}$. Dabei bezeichnet $n!!$ die Doppelfakultät.

- (b) [3 Punkte] Konvergenzverhalten.

Für zu große Störparameterwerte ist die Näherung durchweg schlecht und Störungstheorie somit nicht anwendbar. Auch für kleinere Werte konvergiert die Reihe augenscheinlich nicht (tatsächlich tut sie das nie). Jedoch gibt es für diese kleineren Werte einen Bereich für n_c , innerhalb dessen sie das Integral sehr exakt trifft. Die Anwendbarkeit der Störungstheorie ist also nicht nur abhängig von der Größe des Störparameters, sondern auch von der betrachteten Ordnung (n_c).

2. Delta-Distribution

5 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir folgende Darstellung der Delta-Distribution herleiten

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0)}.$$

Wir machen den folgenden Ansatz mit $x' = x - x_0$ und a, b, c reellen Konstanten, die unter Umständen von σ abhängen können

$$f_{\sigma}(k) = ce^{-ak^2 + ibkx'}.$$

Das Integral über diesen Ausdruck werten wir aus und fordern

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma}(k) dk = c \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2 x'^2}{4a}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-x'^2/\sigma^2}. \quad (1)$$

Vergleich der beiden Gaußfunktionen führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4a} &= \frac{1}{\sigma^2}, \\ c \sqrt{\frac{\pi}{a}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}. \end{aligned}$$

Auflösen von 1 liefert $a = \frac{b^2 \sigma^2}{4}$ und Einsetzen in 2 liefert

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2\pi}.$$

Jetzt lassen wir σ gegen null gehen. Dadurch geht auch a gegen null und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk f_{\sigma \rightarrow 0}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk c e^{ibkx'} = \frac{c}{b} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx'}.$$

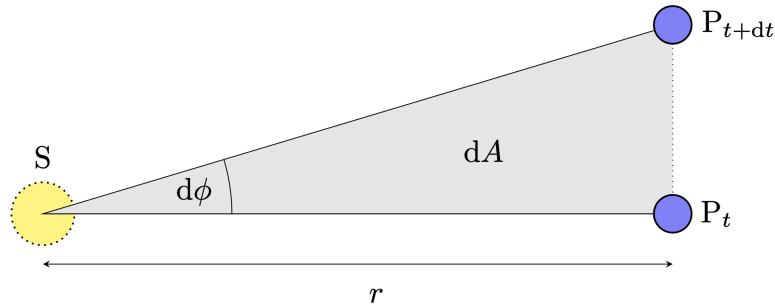
Im dritten Schrit haben wir verwendet $k \rightarrow bk$. Somit erhalten wir die Behauptung aus 1

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx'} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-x'^2/\sigma^2} = \delta(x').$$

3. Planetenbewegung

[7 Punkte]

Ein Planet P der Masse m bewegt sich in einer Umlaufbahn im Abstand $r(t)$ um die Sonne S. Nach einer sehr kleinen Zeit dt ändert sich der Winkel um $d\phi$ und der Planet überstreicht eine Fläche dA .



(a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m},$$

wobei L der Drehimpuls des Planeten ist.

$$dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \sin(d\phi).$$

Aber $\sin(d\phi) \approx d\phi$, deswegen gilt

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} r^2 d\phi \\ \Rightarrow \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{1}{2m} \cdot m r^2 \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{L}{2m}. \end{aligned}$$

(b) Die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ seien gegeben durch

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y.$$

(i) [2 Punkte] Ohne die in der Vorlesung schon angegebenen Gleichungen zu verwenden zeigen Sie, dass

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = a_r \hat{\mathbf{e}}_r + a_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

wobei $\mathbf{r}(t)$ die Position des Planeten relativ zur Sonne ist und

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2), \quad a_\phi = (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{e}}_r \\ &= r\cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + r\sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}[\cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y] + r\dot{\phi}[-\sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y] \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)[\cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y] \\ &\quad + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})[-\sin(\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos(\phi)\hat{\mathbf{e}}_y] \\ &= a_r \hat{\mathbf{e}}_r + a_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \end{aligned}$$

- (ii) [2 Punkte] Zeigen Sie nun, dass $a_\phi = 0$. Was bedeutet dieses Ergebnis physikalisch?

Drehimpulserhaltung:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= 0 \\ \implies \frac{d(mr^2\dot{\phi})}{dt} &= 0 \\ \implies r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} &= 0 \\ \implies r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} &= 0 \\ \implies a_\phi &= 0.\end{aligned}$$

Physikalische Bedeutung: die Beschleunigung wirkt immer in Richtung des Zentrums.