Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 9
Abgabe: Mittwoch 18.01.2023

1. Fehlende Werte — 3 Punkte

Ein korrupter Astronom hat die großen Halbachsen und, sehr geduldig, die Umlaufzeiten von drei Planeten gemessen. Er hatte vor, seine Methode und die Ergebnisse auf einer Konferenz zu präsentieren aber bemerkt, dass zwei Werte verloren gegangen sind:

Planet	Große Halbachse (km)	Umlaufzeit (Erdjahre)
Erde	$\mathrm{a_E} = ?$	$\mathrm{T_E} = 1$
Merkur	$\mathrm{a_M} = 5,8 \times 10^7$	$\mathrm{T_M} = 0,24$
Saturn	$\mathrm{a_S} = 1,4 \times 10^9$	$\mathrm{T_S} = ?$

Da die Konferenz bald beginnt, hat er keine Zeit mehr, die fehlenden Werte nochmal zu messen. Deswegen entscheidet er sich, sie mithilfe der Keplerschen Gesetze zu bestimmen.

Reproduzieren Sie seine neue Methode und berechnen Sie diese Werte.

2. Bezugssysteme — 4 Punkte

Ein Massepunkt der Masse m bewege sich auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = r_{0,x}\mathbf{e}_x + v_z t\mathbf{e}_z \ .$$

Geben Sie die Bahnkurve und kinetische Energie in den folgenden verschiedenen Bezugssystemen an:

(a) [1 Punkt] Um einen Vektor $\mathbf{d}$ verschoben, sodass der Koordinatenursprung des neuen Bezugssystems im alten System bei (d_x, d_y, d_z) liegt.

(b) [1 Punkt] Gleichförmig mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v_z\mathbf{e}_z$ bewegt, sodass für $t = r_{0,x}/v_z$ die Koordinaten beider Systeme zusammenfallen.

(c) [2 Punkte] Mit einem Winkel $\phi(t)$ um die z - Achse rotiert.

3. Zentrifugal- und Corioliskraft — 6 Punkte

Ein Massepunkt m bewege sich entlang einer Helixbahn auf einem rotierenden Zylindermantel mit Radius r. Aus Sicht eines mit dem Zylinder rotierenden Beobachters sei die Bahn also parametrisiert durch $\phi(t)$ und $z(t)$. Die Winkelgeschwindigkeit der Zylinderrotation sei gegeben durch $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$.

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_{\mathrm{C}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

(b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Zentrifugalkraft

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Z}} = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})].$$

(c) [1 Punkt] Wie müssten Sie $\phi(t)$ und $z(t)$ wählen, damit $\mathbf{F}_{\mathrm{C}} + \mathbf{F}_{\mathrm{Z}}$ verschwindet?

(d) [1 Punkt] Für welche Werte von $\dot{\phi}(t)$ dominiert die Corioliskraft die Zentrifugalkraft, also $|\mathbf{F}_{\mathrm{Z}}| < |\mathbf{F}_{\mathrm{C}}|$?

4. Runge-Lenz-Vektor 5 Punkte

Dass die Lösungen des Kepler-Problems geschlossene Umlaufbahnen sind, ist eine Besonderheit des Gravitationspotentials. Schon kleine Abweichungen führen zu Periheldrehungen. Diese Besonderheit des $1/r$-Potentials zeigt sich durch eine weitere (weniger offensichtliche) Erhaltungsgröße. Für das Zentralpotential

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \text{const.}$$

ist der Runge-Lenz-Vektor definiert als

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\frac{\mathbf{r}}{r}\,.$$

Wie wir sehen werden, sind die geschlossenen Bahnkurven eine direkte Folge der Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors:

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{A}$ in der Bewegungsebene liegt.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass wenn die Planetenbahnen minimalen bzw. maximalen Abstand zur Sonne haben, $\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$ ist. Er zeigt damit in Richtung des Perihels (oder Aphels).
Hinweis: Für Extrema von r hat auch $r^2 = \mathbf{r}^2$ ein Extremum.

(c) [2 Punkte] Nutzen Sie die Bewegungsgleichung um zu zeigen, dass $\mathbf{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Somit zeigt der Runge-Lenz-Vektor in Richtung der großen Halbachse und ist zeitlich konstant. Woraus direkt folgt, dass die große Halbachse sich zeitlich nicht ändert, also keine Periheldrehung erfolgt.