

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 9

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 18.01.2023**1. Fehlende Werte**

3 Punkte

Ein korrupter Astronom hat die großen Halbachsen und, sehr geduldig, die Umlaufzeiten von drei Planeten gemessen. Er hatte vor, seine Methode und die Ergebnisse auf einer Konferenz zu präsentieren aber bemerkt, dass zwei Werte verloren gegangen sind:

Planet	Große Halbachse (km)	Umlaufzeit (Erdjahre)
Erde	$a_E = ?$	$T_E = 1$
Merkur	$a_M = 5,8 \times 10^7$	$T_M = 0,24$
Saturn	$a_S = 1,4 \times 10^9$	$T_S = ?$

Da die Konferenz bald beginnt, hat er keine Zeit mehr, die fehlenden Werte nochmal zu messen. Deswegen entscheidet er sich, sie mithilfe der Keplerschen Gesetze zu bestimmen.

Reproduzieren Sie seine neue Methode und berechnen Sie diese Werte.

Kepler III:

$$\frac{T_i^2}{r_i^3} = \frac{T_j^2}{r_j^3}$$

Dadurch findet man $a_E \approx 1,5 \times 10^8$ und $T_S \approx 29,4$.

2. Bezugssysteme

4 Punkte

Ein Massepunkt m bewege sich auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = r_{0,x} \mathbf{e}_x + v_z t \mathbf{e}_z .$$

Geben Sie die Bahnkurve und kinetische Energie in den folgenden verschiedenen Bezugssystemen an:

- (a) [1 Punkt] Um einen Vektor $\mathbf{d}$ verschoben, sodass der Koordinatenursprung des neuen Bezugssystems im alten System bei (d_x, d_y, d_z) liegt.

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{d}, \quad E'(t) = \frac{1}{2} m v_z^2$$

- (b) [1 Punkte] Gleichförmig mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v_z \mathbf{e}_z$ bewegt, sodass für $t = r_{0,x}/v_z$ die Koordinaten beider Systeme zusammenfallen.

Allgemeiner Ansatz $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - v_z t \mathbf{e}_z + \mathbf{c}$ führt auf $\mathbf{c} = r_{0,x} \mathbf{e}_z$ und damit

$$\mathbf{r}'(t) = r_{0,x} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z), \quad E'(t) = 0$$

- (c) [2 Punkte] Mit einem Winkel $\phi(t)$ um die z - Achse rotiert.

Mit der Drehmatrix

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t)) & 0 \\ -\sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= M(t) \mathbf{r}(t), \\ E'(t) &= \frac{1}{2} m \left(\mathbf{r}^T \dot{M}^T \dot{M} \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \dot{M}^T M \mathbf{v} + \mathbf{v}^T M^T \dot{M} \mathbf{r} + \mathbf{v}^T M^T M \mathbf{v} \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left(r^2 \dot{\phi}(t)^2 + v_z^2 \right), \end{aligned}$$

wobei die Mischterme wegfallen, da $M \mathbf{v} = \mathbf{v}$ und $\dot{M} \mathbf{r}$ in der xy - Ebene liegt.

3. Zentrifugal- und Corioliskraft

[6 Punkte]

Ein Massepunkt bewege sich entlang einer Helixbahn auf einem rotierenden Zylindermantel. Die Winkelgeschwindigkeit der Zylinderrotation ist gegeben durch $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$.

Im Folgenden wählen wir ein Bezugssystem, das mit dem Zylinder rotiert.

- (a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Mit $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$ haben wir $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\phi}r\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$ und damit

$$\mathbf{F}_C = -2mr\omega\dot{\phi}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi) = 2mr\omega\dot{\phi}\mathbf{e}_r$$

- (b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Zentrifugalkraft

$$\mathbf{F}_Z = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})].$$

Wir haben

$$\mathbf{F}_Z = -mr\omega^2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi) = mr\omega^2\mathbf{e}_r$$

- (c) [1 Punkt] Wie müssten Sie $\phi(t), z(t)$ wählen, damit $F_C + F_Z$ verschwindet?

Die z - Komponente hat keinen Einfluss und damit folgt $F_C + F_Z = 0 \implies \dot{\phi} = -\omega/2 \implies \phi = -\omega/2t$. Der Massenpunkt muss also dem Zylindermantel mit halber Winkelgeschwindigkeit entgegengesetzt rotieren.

Warum ist aber ϕ nicht $-\omega t$ oder verschwindet? Dazu muss erwähnt werden, dass ϕ relativ zum Zylinder gemessen wird, der kein Inertialsystem darstellt. Auf dem Zylinder gilt Newton II also gerade *nicht* und damit ist nicht jeder stationäre Körper automatisch kräftefrei. Wir fassen $\phi = -\omega t/2$ wegen $F_{\text{Zylinder}} = F_{\text{inertial}} + F_C + F_S$ auf als den Wert für ϕ , bei dem gilt $\mathbf{F}_{\text{inertial}} = \mathbf{F}_{\text{Zylinder}} = m \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t)\mathbf{e}_i(t)$. Nachrechnen für $r = 1$ und eingeschränkt auf xy - Ebene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Zylinder}} &= m\ddot{x}D(\omega t)\mathbf{e}_x + m\ddot{y}D(\omega t)\mathbf{e}_y \\ &= m\omega^2/4 \left(\cos(-\omega t/2) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + \sin(-\omega t/2) \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \right) \\ &= m\omega^2/4 \begin{pmatrix} \cos(\omega t/2) \\ \sin(\omega t/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (d) [1 Punkt] Für welche Werte von $\dot{\phi}(t)$ dominiert die Corioliskraft die Zentrifugalkraft, also $|F_Z| < |F_C|$?

Wir haben $|F_Z| < |F_C| \implies |\dot{\phi}| > \frac{|\omega|}{2}$.

4. Runge-Lenz-Vektor

5 Punkte

Das die Lösungen des Kepler-Problems geschlossene Umlaufbahnen sind ist eine Besonderheit des Gravitationspotentials. Schon kleine Abweichungen führen zu Periheldrehungen. Diese Besonderheit des $1/r$ -Potentials zeigt sich durch eine weitere (weniger offensichtliche) Erhaltungsgröße. Für das Zentralpotential

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$$

ist der Runge-Lenz-Vektor definiert als

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wie wir sehen werden sind die geschlossenen Bahnkurven eine direkte Folge der Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors:

- (a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{A}$ in der Bewegungsebene liegt.

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist erhalten und steht senkrecht zur Bewegungsebene. Da gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - \frac{m^2 \alpha}{r} \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

steht $\mathbf{A}$ wiederum senkrecht auf $\mathbf{L}$, liegt also in der Bewegungsebene.

- (b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass wenn die Planetenbahnen minimalen bzw. maximalen Abstand zur Sonne haben $\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$ ist. Er zeigt damit in Richtung des Perihels (oder Aphels).

Hinweis: Für Extrema von r hat auch $r^2 = \mathbf{r}^2$ ein Extremum.

Wenn $\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$ stehen soll muss gelten $\mathbf{A} \times \mathbf{r} = 0$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{r} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{r} - \frac{m\alpha}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = m\mathbf{L}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) - m\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{L})$$

Für die Extrema gilt $\frac{dr}{dt} = 0$ als auch $\frac{dr^2}{dt} = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ und damit $\mathbf{A} \times \mathbf{r} = 0$.

- (c) [2 Punkte] Nutzen Sie die Bewegungsgleichung um zu zeigen, dass $\mathbf{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Die zeitliche Änderung des Runge-Lenz-Vektors ist gegeben durch

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}} - m\alpha \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right].$$

Es gilt Drehimpulserhaltung, also $\dot{\mathbf{L}} = 0$. Wir nutzen weiter die Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ und erhalten so

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{m\alpha}{r} \left[\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right] = -\frac{m\alpha}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] - \frac{m\alpha}{r} \left[\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right] = 0.$$

Somit zeigt der Runge-Lenz-Vektor in Richtung der großen Halbachse und ist zeitlich konstant. Woraus direkt folgt, dass die große Halbachse sich nicht zeitlich ändert, also keine Periheldrehung erfolgt.

Bonusmaterial:

Wir haben gesehen, dass Erhaltungsgrößen bei der Lösung von Bewegungsgleichung hilfreich sein können. Dies gilt auch für den Runge-Lenz-Vektor:

Legen wir die x -Achse in Richtung von $\mathbf{A}$ so ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \phi$. Mit der Definition von $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r = Ar \cos \phi,$$

erhält man direkt

$$r = \frac{L^2}{m\alpha + A \cos \phi} = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \phi}.$$

Ohne Integration oder das Lösen von Differentialgleichungen.