Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 10
Abgabe: Mittwoch 25.01.2023

Dieses Übungsblatt ist eine Probeklausur. Die Aufgaben entsprechen in Art, Umfang und Schwierigkeitsgrad der späteren Klausur.
Beachten Sie bitte auch, dass die Klausur ohne Hilfsmittel geschrieben wird und Sie hierfür 2 Stunden Zeit haben. Die Aufgaben werden Ihnen daher im Vergleich zu früheren Aufgaben in den Tutorien als einfach erscheinen. Täuschen Sie sich hier bitte nicht!

Zur eigenen Wissenskontrolle empfielt sich somit, dieses Blatt (zuerst) *alleine* und *ohne Hilfsmittel* zu bearbeiten.

Hier noch ein Beispiel eines typischen Deckblatts einer entsprechenden Klausur:

Name:		**Matrikelnr.:**	
Vorname:		**Tutor / Übungsgr.:**	
Studiengang:		**Prüfungsordnung:**	

Wichtige Hinweise:

- **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**
- **Dieses Blatt mit abgeben.**
- **Bitte Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.**
- **Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.**
- **Bitte weder rote Stifte noch Bleistifte verwenden.**
- **Smartphones und andere technische Geräte sind während der Klausur abzuschalten und in Rucksack oder Jacke zu verstauen.**
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
von	5	5	5	5	5	100 % = 17 + 8 Bonuspunkte

1. Warm-up [5 Punkte]

Beantworten Sie in wenigen Stichworten die folgenden Fragen:

(a) [1 Punkte] Eine Bahnkurve sei durch $\mathbf{r}(t)$ gegeben. Wie sind der Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ definiert?

(b) [1 Punkt] Welche Koordinatentransformation beschreibt eine Galilei-Transformation?

(c) [1 Punkt] Welche Bahnkurven beschreiben die Bewegung von Planeten im Gravitationspotential der Sonne?

(d) [1 Punkt] Wie lautet die allgemeine Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators?

(e) [1 Punkt] Wodurch zeichnet sich ein Inertialsystem aus?

2. Bahnkurve in 2D [5 Punkte]

Ein Massepunkt der Masse m bewegt sich in der xy-Ebene auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \rho_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \omega t \\ \rho_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix}$$

mit konstanten Parametern ρ_0, α, ω.

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie die Bahnkurve und unterscheiden Sie explizit die beiden Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$.

(b) [1 Punkt] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ des Massepunkts.

(c) [1,5 Punkte] Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ der Bahnkurve. Berechnen Sie dabei den Krümmungsradius $R(t)$.

(d) [1,5 Punkte] Berechnen Sie die ab $t_0 = 0$ zurückgelegte Strecke.
Im Fall $\alpha < 0$, welche Strecke wird im Grenzfall $t \to \infty$ zurückgelegt?

3. Bewegungsgleichung in einer Dimension, Trennung der Variablen [5 Punkte]

Die eindimensionale Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F \cdot t\,, \qquad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

wobei $F > 0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

(a) [1 Punkt] Setzen Sie den Ausdruck für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ein. Lösen Sie danach die Bewegungsgleichung nach $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auf.

(b) [1,5 Punkte] Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für $t \to \infty$ und für $t \to 0$ an.

(c) [1,5 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von $x(t)$ der Bewegungsgleichung mit Hilfe des Ergebnisses von (a). Die Anfangsbedingung laute $x(t = 0) = 0$.
Hinweis: Beim Berechnen des auftretendes Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = c_1 + c_2 t^2$ *weiter.*

(d) [1 Punkt] Skizzieren Sie die Bahnkurve $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen.

4. Bewegung im eindimensionalen Potential [5 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m mit der Energie E bewegt sich im Kraftfeld des Morse-Potentials

$$U(x) = U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right)^2 \,, \text{ mit } \alpha > 0.$$

(a) [0,5 Punkte] Skizzieren Sie das Potential.

(b) [1,5 Punkte] Betrachten Sie zunächst die Bewegung anhand der Skizze:

(i) Für welche Energie bleibt das Teilchen in Ruhe und wo befindet sich diese Ruhelage x_0?

(ii) Für welche Energien bewegt sich das Teilchen in einem begrenzten Bereich?

(iii) Für welche Energien kann es sich auch bis ins Unendliche bewegen?

(c) [1 Punkt] Bestimmen Sie im Fall der gebundenen Bewegung die beiden Umkehrpunkte $x_{1,2}$

(d) [1 Punkt] Nutzen Sie die Energieerhaltung, um die Bewegungsgleichung des Teilchens zu lösen. Geben Sie dabei die *formale* Lösung $t(x)$ an.
Auftretende Integrale müssen nicht explizit berechnet werden.

(e) [1 Punkt] Betrachten Sie nun ein Teilchen mit einer kleinen aber immer noch positiven Energie. Durch welches Potential wird der Bereich um den Ruhepunkt x_0 angenähert? Welchem anderen physikalischen System entspricht dies?

5. Harmonischer Oszillator mit δ-förmiger Anregung [5 Punkte]

Ein harmonischer Oszillator mit Dämpfung γ und Eigenfrequenz ω_0 wird durch eine δ-förmige Kraft getrieben:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \qquad \text{mit } F(t) = 2\pi\delta(t)\,, \tag{1}$$

wobei $\omega_0 > \gamma$ ist.

(a) [1 Punkt] Berechnen Sie den Realteil, sowie den Imaginärteil der Fouriertransformierten $\tilde{x}(\omega)$, indem Sie Gleichung (1) Fouriertransformieren.

(b) [0,5 Punkte] Berechnen Sie die Phasendifferenz $\Delta\phi(\omega)$ zwischen $\tilde{x}(\omega)$ und $\tilde{F}(\omega)$.

(c) [1 Punkt] Skizzieren Sie die Amplitude $|\tilde{x}(\omega)|$ sowie $\Delta\phi(\omega)$ für feste $\omega_0 > \gamma$.

(d) [0,5 Punkte] Zeigen Sie, dass die Frequenzen $\Omega_\pm = \mathrm{i}\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ komplexe Polstellen von $\tilde{x}(\omega)$ sind.

(e) [0,5 Punkt] Berechnen Sie das Verhältnis der Periodendauer $T(\gamma)$ der gedämpften Schwingung zu der Periodendauer der ungedämpften Schwingung $T(\gamma = 0)$.
Hinweis: Die Periode ist definiert durch $T = \frac{2\pi}{|\mathrm{Re}\,(\Omega_\pm)|}$.

(f) [1,5 Punkte] Berechnen Sie die Phasendifferenz zwischen dem Impuls $\tilde{p}(\Omega_\pm) = m\tilde{v}(\Omega_\pm)$ und der Auslenkung $\tilde{x}(\Omega_\pm)$. Für welche Parameter ω_0 und γ, beträgt die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$?