

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung 10

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 25.01.2023**1. Warm-up**

[5 Punkte]

Beantworten Sie in wenigen Stichworten die folgenden Fragen:

- (a) [1 Punkt] Eine Bahnkurve sei durch $\mathbf{r}(t)$ gegeben. Wie sind Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ definiert?

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \quad \mathbf{n}(t) = \frac{d\mathbf{t}(t)/dt}{|d\mathbf{t}(t)/dt|}$$

- (b) [1 Punkt] Welche Koordinatentransformation beschreibt eine Galilei-Transformation?

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}'(t)$$

- (c) [1 Punkt] Welche Bahnkurven beschreiben die Bewegung von Planeten im Gravitationspotential der Sonne?

Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln

- (d) [1 Punkt] Wie lautet die allgemeine Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators?

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{oder} \quad x(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$$

- (e) [1 Punkt] Wodurch zeichnet sich ein Inertialsystem aus?

Kräftefreier Massepunkt befindet sich in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig.

Alternativ:

Kräftefreier Massepunkt wird nicht beschleunigt, hat konstanten Impuls.

2. Bahnkurve in 2D

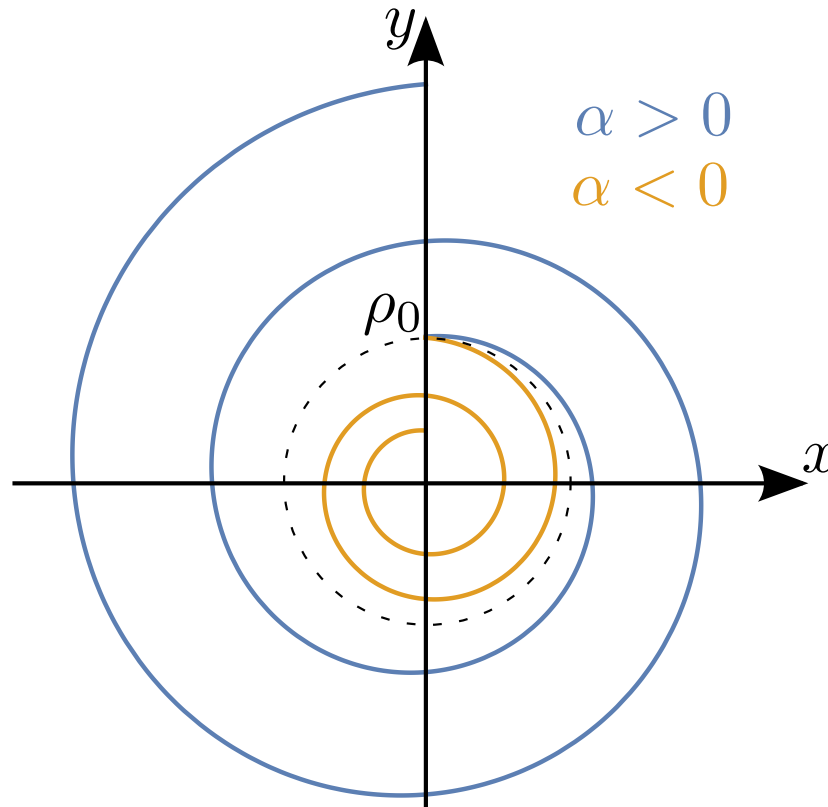
[10 Punkte]

Ein Massepunkt der Masse m bewegt sich in der xy -Ebene auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \rho_0 e^{\alpha t} \sin \omega t \\ \rho_0 e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix}$$

mit konstanten Parametern ρ_0, α, ω .

- (a) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Bahnkurve und unterscheiden Sie explizit die beiden Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$. Die Bahnkurve beschreibt eine 2D Spirale mit dem zeitabhängigen Radius $\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t}$ und einer Kreisfrequenz ω . Für $\alpha < 0$ (bzw. $\alpha > 0$) nimmt der Radius mit exponentiell mit der Zeit ab (bzw. zu).



- (b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ des Massepunkts. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung lassen sich direkt durch differenzieren des Ortsvektors nach der Zeit berechnen:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \rho_0 e^{\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \\ \rho_0 e^{\alpha t} (\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \rho_0 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\alpha\omega \cos \omega t \\ (\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\alpha\omega \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

- (c) [3 Punkte] Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ der Bahnkurve. Berechnen Sie dabei den Krümmungsradius $R(t)$.

Der Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ ist der normierte Geschwindigkeitsvektor. Dieser lautet

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \frac{\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \end{pmatrix}.$$

Der Normaleneinheitsvektor ist definiert durch $\mathbf{n}(t) = \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right| = \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \frac{R(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$. Mit dem obigen Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}(\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t)}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \\ -\frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}(\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t)}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \begin{pmatrix} \alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t \\ -\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck noch abzuschließen benötigen wir noch den Krümmungsradius. Dieser lässt sich durch die Norm des Normaleneinheitsvektors berechnen. Es gilt nämlich $\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 1$. Somit bekommen wir

$$\begin{aligned}1 &= \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \sqrt{(\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t)^2 + (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t)^2} \\ &= \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Nach $R(t)$ aufgelöst liefert dies

$$R(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 e^{\alpha t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \rho_0 e^{\alpha t}.$$

Somit lautet der Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \begin{pmatrix} \alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t \\ -\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

- (d) [3 Punkte] Berechnen Sie die ab $t_0 = 0$ zurückgelegte Strecke.
Im Fall $\alpha < 0$, welche Strecke wird im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ zurückgelegt?

Die ab $t_0 = 0$ zurückgelegte Strecke, bzw. die Bogenlänge ist definiert durch

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(t')| dt',$$

mit $|\mathbf{v}(t')| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 e^{\alpha t'}$. Durch Einsetzen des Ausdrucks für $|\mathbf{v}(t')|$ in die Bogenlänge ergibt sich

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 e^{\alpha t'} dt' = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t'} \right]_0^t \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \frac{\rho_0}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1)\end{aligned}$$

Im Fall $\alpha < 0$, ist die im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ zurückgelegte Strecke

$$s = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \rho_0.$$

3. Bewegungsgleichung in einer Dimension, Trennung der Variablen [10 Punkte]

Die eindimensionale Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t) \frac{dx}{dt} = F \cdot t, \quad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}}$$

wobei $F > 0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

- (a) [2 Punkte] Setzen Sie den Ausdruck für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ein. Lösen Sie danach die Bewegungsgleichung nach $\frac{dx}{dt}$ auf.

Durch Einsetzen des Ausdrucks für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ergibt sich

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}} \frac{dx}{dt} = Ft \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = F^2 t^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 c^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = F^2 t^2 \left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \quad \Leftrightarrow (m^2 c^2 + F^2 t^2) = F^2 t^2 c^2.$$

Da wir den Fall $F > 0$ und Zeiten $t > 0$ betrachten, folgt aus der Bewegungsgleichung $\frac{dx}{dt} > 0$; beim Ziehen der Wurzel behalten wir deshalb nur die positive Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{F^2 t^2 c^2}{m^2 c^2 + F^2 t^2}} = \frac{Ft}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2}}$$

- (b) [3 Punkte] Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \frac{dx}{dt}$ für $t \rightarrow \infty$ und für $t \rightarrow 0$ an, indem Sie im Ergebnis von (a) die rechte Seite für große und kleine t betrachten.

Für kleine Zeiten t ($t \rightarrow 0$) gilt $\frac{Ft}{mc} \ll 1$. Wir können also den Summanden $\left(\frac{Ft}{mc} \right)$ unter der Wurzel vernachlässigen. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{Ft}{m}.$$

Für große Zeiten t ($t \rightarrow \infty$) gilt $\frac{Ft}{mc} \gg 1$. In diesem Fall können wir folgende Näherung vornehmen: $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \approx \frac{Ft}{mc}$. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{Ft}{m} \frac{mc}{Ft} = c.$$

- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von $x(t)$ der Bewegungsgleichung mit Hilfe des Ergebnisses von (a). Die Anfangsbedingung laute $x(t=0) = 0$.
Hinweis: Beim Berechnen des auftretendes Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = c_1 + c_2 t^2$ weiter.

Wir berechnen $x(t)$, indem wir die Geschwindigkeit nach der Zeit integrieren:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Ft}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0=0}^x dx' = \int_0^t \frac{Ft'}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft'}{mc} \right)^2}} dt'.$$

Wir substituieren nun $\tau = 1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2 t'^2$, $d\tau = \frac{2F^2}{m^2 c^2} t' dt'$ und erhalten

$$x(t) = \int_1^{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \frac{mc^2}{F} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{mc^2}{F} [\sqrt{\tau}]_1^{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} - 1 \right]$$

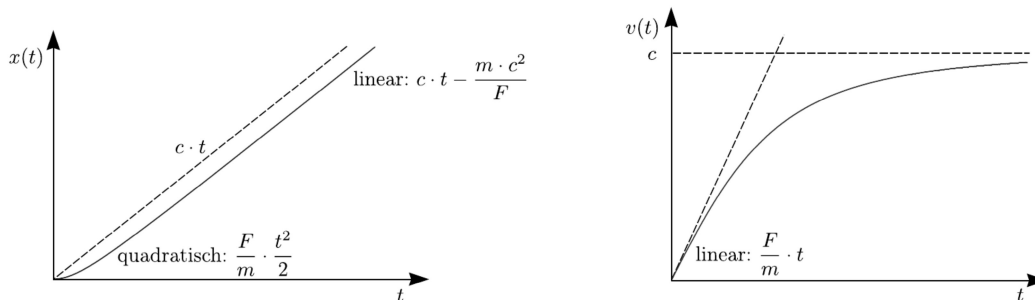
- (d) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Bahnkurve $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen.

Für kleine Zeiten gilt $\left(\frac{Ft}{mc} \right)^2 \ll 1$, und wir können die Näherung $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2$ vornehmen. Damit ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F} \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2 = \frac{F}{2m} t^2.$$

Für große Zeiten gilt $\left(\frac{Ft}{mc} \right)^2 \gg 1$. In diesem Fall nähern wir $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \approx \frac{Ft}{mc}$. Damit ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F} \left(\frac{Ft}{mc} - 1 \right) = ct - \frac{mc^2}{F}.$$



4. Bewegung im eindimensionalen Potential

[10 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m mit der Energie E bewegt sich im Kraftfeld des Morse-Potentials

$$U(x) = U_0 (1 - e^{-\alpha x})^2, \text{ mit } \alpha > 0.$$

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie das Potential.

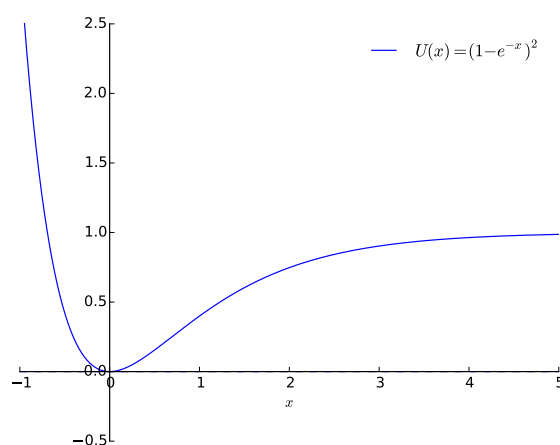


Abbildung 1: Das Morse-Potential für $U_0 = 1$ und $\alpha = 1$.

(b) [3 Punkte] Betrachten Sie zunächst die Bewegung anhand der Skizze:

(i) Für welche Energie bleibt das Teilchen in Ruhe und wo befindet sich diese Ruhelage x_0 ?

Das Teilchen bleibt in Ruhe wenn seine Energie dem Minimum des Potentials entspricht. $U_{\min}(x_0) = 0$ und $x_0 = 0$ sieht man direkt oder berechnet

$$\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_0} = 2\alpha e^{-\alpha x_0} (1 - e^{-\alpha x_0}) = 0 \rightarrow x_0 = 0, \quad U_{\min} = U(0) = 0.$$

(ii) Für welche Energien bewegt sich das Teilchen in einem begrenzten Bereich?

Für Energien $0 \leq E < U_0$ bewegt sich das Teilchen in einem begrenzten Bereich.

(iii) Für welche Energien kann es sich auch bis ins Unendliche bewegen?

Für Energien $E > U_0$ kann sich das Teilchen bis ins Unendliche bewegen.

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie im Fall der gebundenen Bewegung die Umkehrpunkte $x_{1,2}$. Die Umkehrpunkte ergeben sich aus der Bedingung $E = U(x_{1,2})$ und damit

$$E = U_0 (1 - e^{-\alpha x_{1,2}})^2 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}} \right)$$

(d) [2 Punkte] Nutzen Sie die Energieerhaltung, um die Bewegungsgleichung des Teilchens zu lösen. Geben Sie dabei die *formale* Lösung $t(x)$ an. **Auftretende Integrale müssen nicht explizit berechnet werden.**

Die Energie ergibt sich aus kinetischer Energie und potentieller Energie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) .$$

Man erhält die Bewegungsgleichung durch Auflösen nach $\dot{x}$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

Trennung der Variablen und Integration

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} .$$

- (e) [2 Punkte] Betrachten Sie nun ein Teilchen mit einer kleinen aber immer noch positiven Energie. Durch welches Potential wird der Bereich um den Ruhepunkt x_0 angenähert? Welchem anderen physikalischen System entspricht dies?

Das Potential $U(x)$ kann für kleine Energie durch entwickeln um $x_0 = 0$ angenähert werden als

$$U(x) \approx U_0[1 - (1 - \alpha x)^2] = U_0\alpha^2 x^2 .$$

Für kleine Energien entspricht das System also einem harmonischen Oszillator.

5. Harmonischer Oszillator mit δ -förmiger Anregung

[10 Punkte]

Ein harmonischer Oszillator mit Dämpfung γ und Eigenfrequenz ω_0 wird durch eine Kraft $F(t) = 2\pi\delta(t)$ getrieben:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t), \quad (1)$$

wobei $\omega_0 > \gamma > 0$ ist.

- (a) [2 Punkte] Berechnen Sie den Realteil, sowie den Imaginärteil von der Fourier-transformierten $\tilde{x}(\omega)$, indem Sie Gleichung (1) Fourier-transformieren.

Die Fourier-transformation lautet

$$\tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} x(t) e^{-i\omega t}$$

Für die Kraft bekommen wir

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} 2\pi\delta(t) e^{-i\omega t} = 1.$$

Gleichung (1) Fourier-transformiert liefert

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = 1 \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{x}(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \\ &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} - i \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad [1 \text{ Punkt}] \end{aligned}$$

- (b) [1 Punkt] Berechnen Sie die Phasendifferenz $\Delta\phi(\omega)$ zwischen $\tilde{x}(\omega)$ und $\tilde{F}(\omega)$

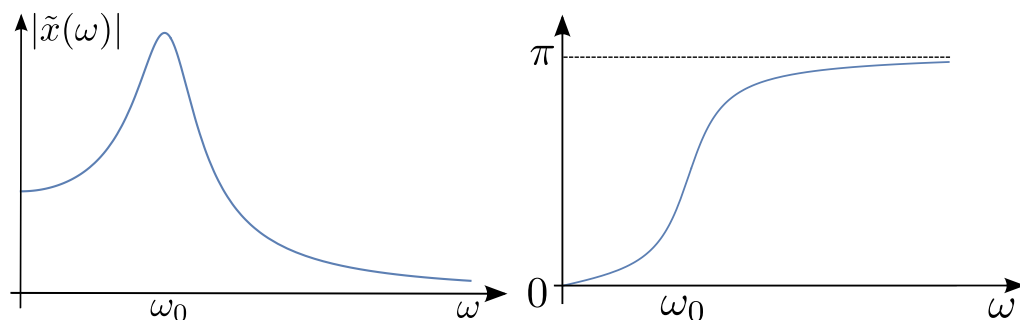
Die Phasendifferenz lässt sich wie folgt berechnen

$$\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} = |\tilde{x}(\omega)| e^{i\Delta\phi(\omega)}$$

$$\text{mit } \Delta\phi(\omega) = \phi_{\tilde{x}}(\omega) - 0 = \arctan\left(-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad [1 \text{ Punkt}]$$

- (c) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Amplitude $|\tilde{x}(\omega)|$ sowie $\Delta\phi(\omega)$ für feste $\omega_0 > \gamma$.

Der Plot für $\Delta\phi(\omega)$ sollte andersrum sein.



[Abbildungen: 1+1 Punkte]

- (d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Frequenzen $\Omega_{\pm} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ komplexe Polstellen von $\tilde{x}(\omega)$ sind.

$$(-\Omega_{\pm}^2 + 2i\gamma\Omega_{\pm} + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \Omega_{\pm} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

- (e) [1 Punkt] Wie groß ist das Verhältnis der Periodendauer $T(\gamma)$ der gedämpften Schwingung zu der Periodendauer der ungedämpften Schwingung $T(\gamma = 0)$.

Hinweis: Die Periode ist definiert durch $T = \frac{2\pi}{|\text{Re}(\Omega_{\pm})|}$.

$$\frac{T(\gamma)}{T(0)} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

- (f) [3 Punkte] Berechnen Sie die Phasendifferenz zwischen dem Impuls $\tilde{p}(\Omega_{\pm}) = m\tilde{v}(\Omega_{\pm})$ und der Auslenkung $\tilde{x}(\Omega_{\pm})$. Für welche Parameter ω_0 und γ , beträgt die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$?

Es gilt

$$\tilde{p}(\omega) = m(i\omega)\tilde{x}(\omega). \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Die Phasendifferenz lässt sich wieder berechnen durch

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}(\Omega_{\pm})}{\tilde{x}(\Omega_{\pm})} &= m(i\Omega_{\pm}) \\ &= m|\Omega_{\pm}|e^{i\left[\arctan\left(\frac{\text{Im}(\Omega_{\pm})}{\text{Re}(\Omega_{\pm})}\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \\ &= m|\Omega_{\pm}|e^{i\left[\arctan\left(\frac{\gamma}{\pm\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \\ &= m|\Omega_{\pm}|e^{i\left[\pm\arctan\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]}. \quad [1 \text{ Punkt}] \end{aligned}$$

Damit die Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ beträgt muss $\arctan\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right) = 0$ gelten, d.h. $\gamma = 0$ oder $\omega_0 \rightarrow \infty$. [1 Punkt]

In beiden Fällen gilt $\gamma < \omega_0$; Im Prinzip $\frac{\gamma}{\omega} \rightarrow 0$.