

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 11

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 01.02.2023**1. Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten**

[5 Punkte]

- (a) [2 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten auf.

$$\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{r}} &= m((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta))\mathbf{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\theta) + r\ddot{\phi} \sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta))\mathbf{e}_\phi) \\
&= -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi\right)
\end{aligned}$$

- (b) [3 Punkte] Zeigen Sie durch Berechnung der Rotation, dass die Kraft
- $\mathbf{F} = -\cos(\theta)\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\phi + r^2 \sin(\phi)\mathbf{e}_\theta$
- nicht konservativ ist.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial F_\phi \sin(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r F_\theta}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\phi \\
&= \frac{\cos(\theta) - r^2 \cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta + \frac{3r^2 \sin(\phi) - \sin(\theta)}{r}\mathbf{e}_\phi \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

2. Fourier-Transformation

[5 Punkte]

- (a) [2 Punkte] Leiten Sie den Verschiebungssatz her, das heißt

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-ikx_0} \tilde{f}(k), \quad x_0 = \text{const.},$$

wobei $\mathcal{F}$ der Fourier-Transformation-Operator ist und $\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)]$.

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x - x_0) e^{-ikx}.$$

Substitution $y = x - x_0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(y)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-ik(x_0+y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} \\
&= e^{-ikx_0} \tilde{f}(k).
\end{aligned}$$

- (b) Es sei nun gegeben, dass

$$f(x) = \cos(x).$$

- (i) [1,5 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k-1) + \delta(k+1)].$$

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\Rightarrow \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix} e^{-ikx} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix(k-1)} + \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix(k+1)} \right] \\
&= \frac{2\pi}{2\sqrt{2\pi}} [\delta(k-1) + \delta(k+1)] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k-1) + \delta(k+1)].
\end{aligned}$$

(ii) [1,5 Punkte] Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\infty} dk \frac{\tilde{f}(k)}{\sin(\pi k/4)}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dk \frac{\tilde{f}(k)}{\sin(\pi k/4)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} dk \frac{\delta(k-1)}{\sin(\pi k/4)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sin(\pi/4)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$