# Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

**Blatt 12**
**Abgabe: Mittwoch 08.02.2023**

Dieses Übungsblatt ist eine Probeklausur. Die Aufgaben entsprechen in Art, Umfang und Schwierigkeitsgrad der späteren Klausur.
Beachten Sie bitte auch, dass die Klausur ohne Hilfsmittel geschrieben wird und Sie hierfür 2 Stunden Zeit haben. Die Aufgaben werden Ihnen daher im Vergleich zu früheren Aufgaben in den Tutorien als einfach erscheinen. Täuschen Sie sich hier bitte nicht!

Zur eigenen Wissenskontrolle empfielt sich somit, dieses Blatt (zuerst) *alleine* und *ohne Hilfsmittel* zu bearbeiten.

Hier noch ein Beispiel eines typischen Deckblatts einer entsprechenden Klausur:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Name:** | | **Matrikelnr.:** | |
| **Vorname:** | | **Tutor / Übungsgr.:** | |
| **Studiengang:** | | **Prüfungsordnung:** | |

## Wichtige Hinweise:

- **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**
- **Dieses Blatt mit abgeben.**
- **Bitte Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.**
- **Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.**
- **Bitte weder rote Stifte noch Bleistifte verwenden.**
- **Smartphones und andere technische Geräte sind während der Klausur abzuschalten und in Rucksack oder Jacke zu verstauen.**
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | |
| von | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 100 % = 25 |

**1. Warm-up** [5 Punkte]

Beantworten Sie in wenigen Stichworten die folgenden Fragen:

(a) [1 Punkt] Welche (mathematische) Bedingung muss ein zeitunabhängiges Kraftfeld erfüllen, damit es sich um eine konservative Kraft handelt?

(b) [1 Punkt] Durch welchen Ausdruck bestimmt man für ein gegebenes Potentialkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ das zugehörige Potential $U(\mathbf{r})$?

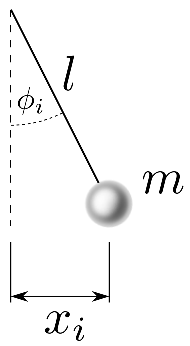
(c) [1 Punkt] Ein Massepunkt wird in einem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ entlang eines Weges $C$ von $\mathbf{r}_1$ nach $\mathbf{r}_2$ bewegt. Durch welchen Ausdruck berechnet man allgemein die dabei an dem Massepunkt verrichtete Arbeit?

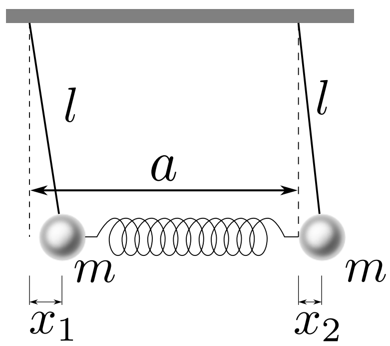
(d) [1 Punkt] Das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sei nun konservativ. Wie lässt sich in diesem Fall die verrichtete Arbeit durch das zugehörige Potential ausdrücken?

(e) [1 Punkt] Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Stokesscher Reibung sei beschrieben durch die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx$. Welche Eigenfrequenz hat der ungedämpfte Oszillator? Welche qualitativ unterschiedliche Bewegungsarten werden beobachtet und für welche Reibung $r$?

**2. Gekoppelte Pendel** [5 Punkte]

Zwei identische Fadenpendel der Länge $l_1 = l_2 = l$ mit Punktmassen $m_1 = m_2 = m$ seien durch eine masselose Feder (Federkonstante $k$, Ruhelänge $a$) verbunden und schwingen in der $xy$-Ebene. Die Pendel sind im Abstand $a$ aufgehängt und $x_{1/2}$ bezeichnen die Auslenkung der Pendel in $x$-Richtung aus der (ungekoppelten) Ruhelage.




Betrachten Sie nur zunächst ein einzelnes ungekoppeltes Pendel:

(a) [2 Punkte] Leiten Sie für kleine Auslenkungen die Schwingungsgleichung für $\phi_i$ her und bestimmen Sie die Eigenfrequenz $\omega_0$ des Pendels.

(b) [0,5 Punkte] Zeigen Sie damit, dass in diesem Fall die Auslenkung $x_i(t)$ beschrieben wird durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_i = -Dx_i$$

und bestimmen Sie $D$.

Betrachten Sie nun das gekoppelte System. Die Pendel seien nun zusätzlich durch ein Feder (Federkonstante $k > 0$, Ruhelänge $a$) gekoppelt.

(c) [0,5 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

(d) [1,5 Punkte] Entkoppeln Sie dieses System von Differentialgleichungen durch die Einführung geeigneter neuer Koordinaten und finden Sie die Bewegungsgleichungen für diese Koordinaten.

(e) [0,5 Punkte] Geben Sie die allgemeinen Lösungen dieser Bewegungsgleichungen an.

**3. Konservatives Kraftfeld, Potential** [5 Punkte]

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ez \end{pmatrix}$$

(a) [1 Punkt] Welche Bedingung müssen die Konstanten $a, b, c, d, e \neq 0$ erfüllen, damit $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist?

(b) [1,5 Punkte] Bestimmen Sie das zugehörige Potential $U(\mathbf{r})$. Berechnen Sie zur Kontrolle das aus dem gefundenen Potential resultierende Kraftfeld.

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie, durch explizite Berechnung der Wegintegrale, die an einem Massepunkt verrichtete Arbeit entlang der Wege:

(i) $C_1$: Auf direktem Weg von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 1)$.

(ii) $C_2$: In einem Halbkreis in der $xy$-Ebene von $(1, 0, 1)$ über $(0, -1, 1)$ nach $(-1, 0, 1)$.

(iii) $C_3$: Auf direktem Weg von $(-1, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$.

(d) [0,5 Punkte] Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie Ihre Ergebniss aus dem Aufgabenteil c).

**4. Greensche Funktion** [5 Punkte]

Es sei $\mathbf{A}$ eine $3 \times 3$ Matrix mit $\mathbf{A}^2 = 1$ und $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))^T$. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung mit einer fouriertransformierbaren Funktion $\mathbf{q}(t)$, der $3 \times 3$-Einheitsmatrix $\mathbf{I}_3$ und der Konstante $K$

$$\left(\mathbf{A}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - K \cdot \mathbf{I}_3\right)\mathbf{v}(t) = \mathbf{q}(t).$$

(a) [1 Punkt] Im Fourierraum erhalten Sie also eine Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{M}(\omega)\tilde{\mathbf{v}}(\omega) = \tilde{\mathbf{q}}(\omega).$$

Bestimmen Sie $\mathbf{M}(\omega)$.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass eine formale Lösung der Gleichung durch

$$\mathbf{v}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \mathbf{G}(t - t')\mathbf{q}(t')$$

gegeben ist. Dabei ist $\mathbf{G}(t) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{M}^{-1}(\omega)]$ die Greensche Funktion der Differentialgleichung. Verwenden Sie dazu

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)] = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' a(t')b(t - t').$$

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie nun nur unter Verwendung des in (a) gefundenen Ausdruckes und $\mathbf{A}^2 = 1$ einen Ausdruck für $\mathbf{M}^{-1}(\omega)$. Betrachten Sie das asymptotische Verhalten dieser Matrix für $\omega \to \pm\infty$.

**5. Partikuläre Lösung** [5 Punkte]

Wir wollen eine allgemeine Formel zur Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)\,,$$

herleiten.

(a) [3 Punkte] Zerlegen Sie die linke Seite dieser Gleichung in Linearfaktoren und setzen Sie $y(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}\omega\right) x(t)$. Sie erhalten eine inhomogene lineare DGL der ersten Ordnung für $y(t)$. Lösen Sie diese DGL durch Variation der Konstanten, d.h. durch einen Ansatz der Form

$$y(t) = u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

(b) [2 Punkte] Lösen Sie die verbliebene DGL erster Ordnung für $x(t)$ mit einem analogen Ansatz. Sie erhalten die gesuchte allgemeine Formel durch Einsetzen des Ergebnisses von (a).