

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Muster 12

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 08.02.2023

Dieses Übungsblatt ist eine Probeklausur. Die Aufgaben entsprechen in Art, Umfang und Schwierigkeitsgrad der späteren Klausur.

Beachten Sie bitte auch, dass die Klausur ohne Hilfsmittel geschrieben wird und Sie hierfür 2 Stunden Zeit haben. Die Aufgaben werden Ihnen daher im Vergleich zu früheren Aufgaben in den Tutorien als einfach erscheinen. Täuschen Sie sich hier bitte nicht!

Zur eigenen Wissenskontrolle empfiehlt sich somit, dieses Blatt (zuerst) *alleine* und *ohne Hilfsmittel* zu bearbeiten.

Hier noch ein Beispiel eines typischen Deckblatts einer entsprechenden Klausur:

Name:		Matrikelnr.:	
Vorname:		Tutor / Übungsgr.:	
Studiengang:		Prüfungsordnung:	

Wichtige Hinweise:

- Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.
- Dieses Blatt mit abgeben.
- Bitte Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.
- Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.
- Bitte weder rote Stifte noch Bleistifte verwenden.
- Smartphones und andere technische Geräte sind während der Klausur abzuschalten und in Rucksack oder Jacke zu verstauen.
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
von	5	5	5	5	5	100 % = 25

1. Warm-up

[5 Punkte]

Beantworten Sie in wenigen Stichworten die folgenden Fragen:

- (a) [1 Punkt] Welche (mathematische) Bedingung muss ein zeitunabhängiges Kraftfeld erfüllen, damit es sich um eine konservative Kraft handelt?

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

- (b) [1 Punkt] Durch welchen Ausdruck bestimmt man für ein gegebenes Potentialkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ das zugehörige Potential?

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')$$

- (c) [1 Punkt] Ein Massepunkt wird in einem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ entlang eines Weges C von $\mathbf{r}_1$ nach $\mathbf{r}_2$ bewegt. Durch welchen Ausdruck berechnet allgemein die dabei an dem Massepunkt verrichtete Arbeit?

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

- (d) [1 Punkt] Das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sei nun konservativ. Wie lässt sich in diesem Fall die verrichtete Arbeit durch das zugehörige Potential ausdrücken?

$$W = -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1)$$

- (e) [1 Punkt] Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Stokesscher Reibung sei beschrieben durch die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx$. Welche Eigenfrequenz hat der ungedämpfte Oszillator? Welche qualitativ unterschiedliche Bewegungsarten werden beobachtet und für welche Reibung r ?

Antwort:

Die Eigenfrequenz ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

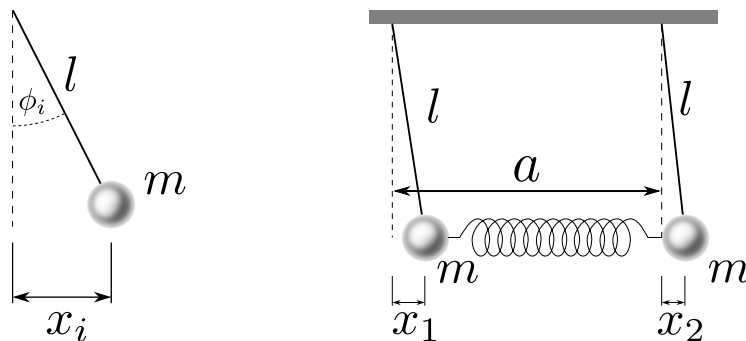
Getrennt betrachtet werden müssen

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &< \left(\frac{r}{2m}\right)^2 && \text{Kriechfall} \\ \omega_0^2 &= \left(\frac{r}{2m}\right)^2 && \text{aperiodischer Grenzfall, und} \\ \omega_0^2 &> \left(\frac{r}{2m}\right)^2 && \text{Schwingfall.} \end{aligned}$$

2. Gekoppelte Pendel

[5 Punkte]

Zwei identische Fadenpendel der Länge $l_1 = l_2 = l$ mit Punktmassen $m_1 = m_2 = m$ seien durch eine masselose Feder (Federkonstante k , Ruhelänge a) verbunden und schwingen in der xy -Ebene. Die Pendel sind im Abstand a aufgehängt und $x_{1/2}$ bezeichnen die Auslenkung der Pendel in x -Richtung aus der (ungekoppelten) Ruhelage.



Betrachten Sie nur zunächst ein einzelnes ungekoppeltes Pendel:

- (a) [2 Punkte] Leiten Sie für kleine Auslenkungen die Schwingungsgleichung für ϕ_i her und bestimmen Sie die Eigenfrequenz ω_0 des Pendels.

$$\mathbf{F}_g = -mg \mathbf{e}_y \quad \rightarrow \quad F_\phi = -mg \sin \phi \approx -mg \phi$$

und mit $\rho = l = \text{const.}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = l\ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi \quad \rightarrow \quad ml\ddot{\phi} = -mg \phi \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Die Eigenfrequenz ist damit gegeben durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

- (b) [0,5 Punkte] Zeigen Sie damit, dass in diesem Fall die Auslenkung $x_i(t)$ beschrieben wird durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_i = -Dx_i$$

und bestimmen Sie D .

Es gilt $x_i = l \sin \phi_i \approx l\phi_i$ und damit $\ddot{x}_i \approx l\ddot{\phi}_i$. Eingesetzt in Teilaufgabe (a):

$$m\ddot{x}_i = -\frac{mg}{l}x_i = -Dx_i \quad \text{mit} \quad D = \frac{mg}{l} \quad [0,5 \text{ Punkte}]$$

Betrachten Sie nun das gekoppelte System. Die Pendel seien nun zusätzlich durch ein Feder (Federkonstante k , Ruhelänge a) gekoppelt.

- (c) [0,5 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 - k(x_1 - x_2) \quad [0,25 \text{ Punkte}] \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 + k(x_1 - x_2) \quad [0,25 \text{ Punkte}] \quad (2)$$

- (d) [1,5 Punkte] Entkoppeln Sie dieses System von Differentialgleichungen durch die Einführung geeigneter neuer Koordinaten und finden Sie die Bewegungsgleichungen für diese Koordinaten.

Wir wählen „Schwerpunkt“- und „Relativ“-Koordinaten

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x = x_1 - x_2 \quad [0,5 \text{ Punkte}]$$

und erhalten durch Addition bzw. Subtraktion von (1) und (2)

$$mX = -DX \quad [0,5 \text{ Punkte}]$$

$$m\ddot{x} = -Dx - 2kx \quad [0,5 \text{ Punkte}]$$

- (e) [0,5 Punkte] Geben Sie die allgemeinen Lösungen dieser Bewegungsgleichungen an.

Es handelt sich um Schwingungsgleichungen deren Lösung gegeben ist durch

$$X(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + B_1) \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} = \frac{g}{l} \quad [0,25 \text{ Punkte}]$$

$$x(t) = A_2 \cos(\omega_1 t + B_2) \quad \text{mit} \quad \omega_1^2 = \frac{D + 2k}{m} = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \quad [0,25 \text{ Punkte}]$$

3. Konservatives Kraftfeld, Potential

[5 Punkte]

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ez \end{pmatrix}$$

- (a) [1 Punkt] Welche Bedingung müssen die Konstanten $a, b, c, d, e \neq 0$ erfüllen, damit $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist?

Wir betrachten die Bedingung $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $c = b$ ist das Kraftfeld konservativ.

- (b) [1,5 Punkte] Bestimmen Sie das Potential $U(\mathbf{r})$. Berechnen Sie zur Kontrolle das aus dem gefundenen Potential resultierende Kraftfeld.

Wir Berechnen das Potential $U(\mathbf{r})$ über das Wegintegral mit Hilfe der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (xt, yt, zt)$ mit $t = [0, 1]$:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) - U(0, 0, 0) &= - \int_0^1 \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \\ ez \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= - [(ax + by)x + (bx + dy)y + ez^2] \int_0^1 t dt \\ &= - \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + dy^2 + ez^2) \end{aligned}$$

Test:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \\ ez \end{pmatrix}.$$

- (c) [2 Punkte] Bestimmen Sie, durch explizite Berechnung der Wegintegrale, die an einem Massepunkt verrichtete Arbeit entlang der Wege:

- (i) C_1 : Auf direktem Weg von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 1)$.

Mit der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (t, 0, t)$ mit $t = [0, 1]$:

$$W_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} at \\ bt \\ et \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = (a + e) \int_0^1 t dt = \frac{a + e}{2}$$

- (ii) C_2 : In einem Halbkreis in der xy -Ebene von $(1, 0, 1)$ über $(0, -1, 1)$ nach $(-1, 0, 1)$.

Mit der Parametrisierung $r(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1)$ mit $t = [0, \pi]$:

$$W_2 = \int_0^\pi \begin{pmatrix} a \cos(t) - b \sin(t) \\ b \cos(t) - d \sin(t) \\ e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad (3)$$

$$= - \int_0^\pi (a \sin t \cos t - b \sin^2 t + b \cos^2 t - d \sin t \cos t) dt \quad (4)$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a - d) \sin t \cos t + b(\cos^2 t - \sin^2 t)] dt \quad (5)$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a - d) \cos t(-\sin t) + b(\sin^2 t - \cos^2 t)] dt = 0 \quad (6)$$

- (iii) C_3 : Auf direktem Weg von $(-1, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$.

Mit der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (-t, 0, t)$ mit $t = [1, 0]$:

$$W_3 = \int_1^0 \begin{pmatrix} -at \\ bt \\ et \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -(a + e) \int_0^1 t dt = -\frac{a + e}{2}$$

- (d) [0,5 Punkte] Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil c).

$$W_1 = -U(1, 0, 1) + U(0, 0, 0) = \frac{1}{2}(a + e) - 0 = \frac{1}{2}(a + e)$$

$$W_2 = -U(-1, 0, 1) + U(1, 0, 1) = \frac{1}{2}(a + e) - \frac{1}{2}(a + e) = 0$$

$$W_3 = -U(0, 0, 0) + U(-1, 0, 1) = 0 - \frac{1}{2}(a + e) = -\frac{1}{2}(a + e)$$

4. Greensche Funktion

[5 Punkte]

Es sei $\mathbf{A}$ eine 3×3 Matrix mit $\mathbf{A}^2 = 1$ und $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))^T$. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung mit einer fouriertransformierbaren Funktion $\mathbf{q}(t)$, der 3×3 -Einheitsmatrix $\mathbf{I}_3$ und der Konstanten K

$$\left(\mathbf{A} \frac{d^2}{dt^2} - K \cdot \mathbf{I}_3 \right) \mathbf{v}(t) = \mathbf{q}(t)$$

- (a) [1 Punkt] Im Fourierraum erhalten Sie also eine Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{M}(\omega) \tilde{\mathbf{v}}(\omega) = \tilde{\mathbf{q}}(\omega).$$

Bestimmen Sie $\mathbf{M}(\omega)$.

Aus der Fouriertransformation folgt $\mathbf{M}(\omega) = -(\mathbf{A}\omega^2 + K \cdot \mathbf{I}_3)$.

- (b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass eine formale Lösung der Gleichung durch

$$\mathbf{v}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{G}(t - t') \mathbf{q}(t')$$

gegeben ist. Dabei ist $\mathbf{G}(t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{M}^{-1}(\omega)]$ die Greensche Funktion der Differentialgleichung. Verwenden Sie dazu

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)] = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' a(t') b(t - t').$$

Die fouriertransformierte Gleichung ergibt direkt

$$\tilde{\mathbf{v}}(\omega) = \mathbf{M}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{q}}(\omega) \implies \mathbf{v}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{M}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{q}}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{M}^{-1}(\omega)](t - t') \cdot \mathbf{q}(t').$$

- (c) [2 Punkte] Bestimmen Sie nun nur unter Verwendung des in (a) gefundenen Ausdruckes und $\mathbf{A}^2 = 1$ einen Ausdruck für $\mathbf{M}^{-1}(\omega)$. Betrachten Sie das asymptotische Verhalten dieser Matrix für $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Wegen $\mathbf{A}^2 = 1$ ist

$$-(\mathbf{A}\omega^2 + K \cdot \mathbf{I}_3) \cdot (\mathbf{A}\omega^2 - K \cdot \mathbf{I}_3) = -(\omega^4 - K^2) \cdot \mathbf{I}_3.$$

Damit folgt

$$\mathbf{M}^{-1}(\omega) = \frac{1}{K^2 - \omega^4} (\mathbf{A}\omega^2 - K \cdot \mathbf{I}_3).$$

Diese Matrix verschwindet für $\omega \rightarrow \pm\infty$.

5. Partikuläre Lösung

[5 Punkte]

Wir wollen eine allgemeine Formel zur Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung (DGL)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (7)$$

herleiten.

- (a) [3 Punkte] Zerlegen Sie die linke Seite von (7) in Linearfaktoren und setzen Sie $y(t) = \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x(t)$.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= f(t) \\ \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x(t) &= f(t) \\ \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) y(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine inhomogene lineare DGL der ersten Ordnung für $y(t)$ und lösen diese DGL durch Variation der Konstanten, d.h. durch einen Ansatz der Form

$$y(t) = u(t)e^{-i\omega t}.$$

Dieser Ansatz führt auf

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \frac{du}{dt} - i\omega u(t)e^{-i\omega t} + i\omega u(t)e^{-i\omega t} &= f(t) \\ e^{-i\omega t} \frac{du}{dt} &= f(t) \\ \Rightarrow u(t) &= \int^t dt' e^{i\omega t'} f(t') \end{aligned}$$

und damit

$$y(t) = e^{-i\omega t} u(t) = \int^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t') \quad (8)$$

- (b) [2 Punkte] Lösen Sie die verbliebene DGL erster Ordnung für $x(t)$ mit einem analogen Ansatz. Sie erhalten die gesuchte allgemeine Formel durch Einsetzen des Ergebnisses von (a). Die DGL für erster Ordnung $x(t)$ löst man dann analog

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i\omega t} \int^t dt' e^{-i\omega(t-t')} y(t') \\ &= \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} y(t') \end{aligned} \quad (9)$$

Einsetzen von (8) in (9) liefert

$$x(t) = \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt'' e^{-i\omega(t'-t'')} f(t''). \quad (10)$$