

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 11

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 15.02.2023**1. Gekoppelte harmonische Oszillatoren**

[5 Punkte]

Gegeben seien drei identische Punktmassen der Masse m , die untereinander durch Federn identischer Härte K verbunden sind.



- (a) [2 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in der folgenden Matrixform auf (es bezeichne $\mathbf{x}(t)$ den Vektor der Auslenkungen der Massen aus der Ruhelage).

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{x}(t). \quad (1)$$

Die Matrix ergibt sich mit den Folien der Vorlesung und der Neudefinition $K \rightarrow K/m$ zu

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2K & K & 0 \\ K & -2K & K \\ 0 & K & -2K \end{pmatrix} \quad (2)$$

- (b) [3 Punkte] Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, x_0)$. Ein harmonischer Ansatz führt auf eine Eigenwertgleichung

$$-\omega^2 \mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{B}. \quad (3)$$

Die Eigenwerte der Matrix sind

$$\begin{aligned} m_1 &= -2K \\ m_2 &= -K(2 + \sqrt{2}) \\ m_3 &= -K(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1) \\ \mathbf{B}_3 &= \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1) \end{aligned}$$

und damit ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$x(t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i (a_{i,+} e^{i\sqrt{-m_i}t} + a_{i,-} e^{-i\sqrt{-m_i}t}), \quad (4)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten. Die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, x_0)$ führt dann z.B. auf $a_{1,+} = a_{1,-} = 0, a_{2,+} = a_{2,-} = a_{3,+} = a_{3,-} = x_0/2$.

2. Quadratische Näherung für 1D Potential

[5 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m und Gesamtenergie E bewege sich in einem 1D Potential $V(x)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

- (a) [2 Punkte] Geben Sie unter Ausnutzung der Energieerhaltung den Ausdruck $t(x)$ an.
 Aus $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ folgt

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2/m(E - V(x))}$$

$$t(x') = \int_{x_0}^{x'} dx \frac{1}{\sqrt{2/m(E - V(x))}}.$$

- (b) [3 Punkte] Das Potential besitze bei x_m ein Minimum. Finden Sie $x(t)$, indem Sie das auftretende Integral für ein quadratisch genähertes Potential auswerten.

Hinweis: Eine Substitution der Art $x = \sin(u)$ ist hilfreich.

In quadratischer Näherung

$$V(x) \approx V(x_m) + V''(x_m)/2 \cdot (x - x_m)^2 = V_m + C(x - x_m)^2.$$

Da V bei x_m minimal wird, ist $C > 0$. Damit

$$t(x') = \sqrt{m/2} \int_{x_0}^{x'} dx \frac{1}{\sqrt{E - V_m - C(x - x_m)^2}} \quad y = x - x_m$$

$$= \sqrt{m/2} \int_{x_0 - x_m}^{x' - x_m} dy \frac{1}{\sqrt{E - V_m}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{E - V_m} y^2}}$$

Es gilt $E = T + V > V_m$ (die kinetische Energie des Teilchens kann nicht negativ werden).

Wir wählen die Substitution $\sqrt{\frac{C}{E - V_m}} y = \sin(u) \implies dy = \sqrt{\frac{E - V_m}{C}} \cos(u) du$, womit die Integralgrenzen wie folgt transformieren

$$u' = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{C}{E - V_m}} (x' - x_m) \right),$$

$$u_0 = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{C}{E - V_m}} (x_0 - x_m) \right),$$

und damit

$$t(x') = \sqrt{\frac{m}{2C}} \int_{u_0}^{u'} du \frac{\cos(u)}{\sqrt{1 - \sin^2(u)}} = \sqrt{\frac{m}{2C}} (u' - u_0).$$

Damit ergibt sich

$$x'(t) = \sqrt{\frac{E - V_m}{C}} \sin \left(\sqrt{\frac{2C}{m}} t + u_0 \right) + x_m.$$

(c) **Epizykloide**

[5 Punkte]

Eine Epizykloide wird beschrieben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R(k+1) \cos t - R \cos[(k+1)t] \\ R(k+1) \sin t - R \sin[(k+1)t] \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

wobei $R > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ Konstanten seien.

Zeigen Sie, dass die Bogenlänge L einer Epizykloide durch

$$L = 8R(k+1)$$

gegeben ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Identität $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b dt \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \\ &= R(k+1) \int_0^{2\pi} dt \sqrt{(-\sin t + \sin[(k+1)t])^2 + (\cos t - \cos[(k+1)t])^2} \\ &= R(k+1) \int_0^{2\pi} dt \sqrt{2 - 2 \sin t \sin[(k+1)t] - 2 \cos t \cos[(k+1)t]} \\ &= \sqrt{2} R(k+1) \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 - \cos kt} \\ &= \sqrt{2} R(k+1) \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 - \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{kt}{2} \right) \right]} \\ &= 2R(k+1) \int_0^{2\pi} dt \left| \sin \left(\frac{kt}{2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} \frac{kt}{2} = T &\implies dt = \frac{2}{k} dT \\ \implies L &= \frac{4R(k+1)}{k} \cdot k \cdot \int_0^\pi dT \sin(T) \\ &= 8R(k+1). \end{aligned}$$