Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 3

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 10.11.2023, 12 Uhr
Besprechung: 17.11.2023

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 5: Die Methodiken der Physik (z.B. zu Lösungsmethoden von Differentialgleichungen) sind in vielen Bereichen der Wissenschaft anwendbar, als Physiker*in im ersten Semester können Sie schon zur Forschung in der Epidemiologie beitragen: Im Folgenden betrachten wir die Virusinfektion einer Menschengruppe; die *Prävalenz* $v(t)$ bezeichnet den Anteil der Infizierten in dieser Gruppe. D.h. $v(t) = 0.5$ bedeutet, dass zum Zeitpunkt t die Hälfte infiziert ist. Eine zusätzliche Infektion erfordert, dass sich ein Infizierter und ein Nichtinfizierter begegnen. Um die Ausbreitung der Epidemie zu modellieren[1] ist es also plausibel, anzunehmen, dass die Änderung $\dot{v}(t)$ proportional zu $v(t)(1 - v(t))$ ist:

$$\dot{v}(t) = \; av(t)(1 - v(t)) \tag{1}$$

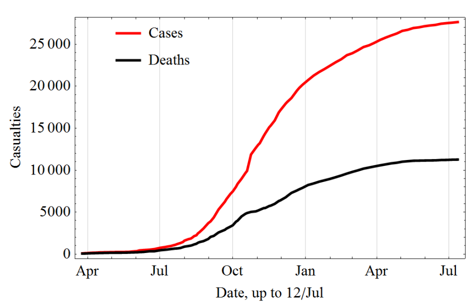
Die Konstante a kombiniert zwei Informationen, nämlich wie ansteckend das Virus ist und wie oft sich Menschen begegnen. Man nennt solche Konstanten *Parameter des Modells*.

a) (0,5 Punkte) Bestimmen Sie die Konstanten A und B in der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x}$$

b) (1 Punkt) Lösen Sie Gl. (1), um $v(t)$ zu bestimmen. Drücken Sie die Integrationskonstante durch den Anfangswert $v(t_0)$, also die Prävalenz zum Zeitpunkt $t = t_0$, aus.
Hinweis: Achten Sie darauf, dass die Argumente der Logarithmen nicht negativ sind.

c) (0,5 Punkte) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Krankheitverlauf der Ebolafieber-Epidemie in Westafrika im Jahr 2014,



(Quelle: Leopoldo Martin R, Lizenz CC BY-SA 3.0), und bestimmen Sie a zunächst aus der

[1] Ein *Modell* ist eine *ad-hoc*-Beschreibung (*ad-hoc* ist lateinisch und bedeutet *für dies*) eines Phänomens. Die Vorhersagekraft eines Modells beschränkt sich auf das betrachtete Phänomen, ohne Bezug zu fundamentalen Prinzipien. Damit ist ein Modell schwächer als eine Theorie.

oberen roten und dann aus der unteren schwarzen Kurve.

d) (1,5 Punkte) Gl. (1) beschreibt die Covid-19-Pandemie nicht gut, weil weder das Absterben des Virus' (durch Genesung oder Tod) noch die Maßnahmen der Regierung zur Verringerung ansteckender Begegnungen im Modell abgebildet sind. Andererseits war während der Pandemie im Jahr 2020 in Karlsruhe $v(t) < 0.01$, so dass wir den Faktor $1 - v(t)$ in Gl. (1) näherungsweise durch 1 ersetzen dürfen. Ein gutes Modell ist

$$\dot{v}(t) = \left(-b + \int_{t-t_{\text{inf}}}^{t} g(s)\, ds \right) v(t) \tag{2}$$

mit einer Funktion $g \geq 0$, die den zeitlichen Verlauf des Kontaktverhaltens der betroffenen Gruppe beschreibt, und eines Parameters b zur Beschreibung des Absterbens des Virus'. t_{inf} ist die Zeit, in der ein(e) Partient*in infektiös ist, also ca. $t_{\text{inf}} = 10$ Tage.

Lösen Sie Gl. (2), wobei Sie die Lösung durch ein Integral über $G(t) := \int_{t-t_{\text{inf}}}^{t} g(s)\, ds$ ausdrücken und wieder die Integrationskonstante zugunsten von $v(t_0)$ eliminieren.

e) (1 Punkt) Zur Simulation eines teilweisen Lockdowns, der zum Zeitpunkt $t = 0$ (entspricht dem 2. November 2020) erlassen wird, betrachten wir die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} g_1 & \text{für } t \leq 0 \\ g_2 & \text{für } t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

mit positiven Konstanten g_1 und g_2, wobei $g_1 > g_2$. Bestimmen Sie $G(t)$ und setzen sie es in Ihre Lösung aus Teilaufgabe (d) ein, um $v(t)$ zu finden. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch $v(0)$ (also die Prävalenz am Tag des Lockdowns) aus.

Hinweis: Um $G(t)$ und $v(t)$ zu finden, müssen Sie die auftretenden Integrale für die Fälle $t < 0$, $0 \leq t < t_{\text{inf}}$ und $t \geq t_{\text{inf}}$ getrennt lösen und die drei Integrationskonstanten so wählen, dass Ihre Lösungen bei $t = 0$ und $t = t_{\text{inf}}$ stetig ist. Warum hat $v(t)$ keine Knicke?

f) (0,5 Punkte) Betrachten Sie nun (d bedeutet „Tage“)

$$t_{\text{inf}} = 10\, d, \qquad b = 0,14\, \frac{1}{d}, \qquad g_1 = 0,024\, \frac{1}{d^2}, \qquad g_2 = 0,012\, \frac{1}{d^2} \tag{4}$$

Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t_{\max}$, zu dem $v(t_{\max})$ sein Maximum erreicht. Zeichnen Sie $v(t)/v(0)$ für $-5\, d \leq t \leq 30\, d$.

Aufgabe 6: Wir betrachten ein Fahrzeug mit Masse m, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, und für $t \geq 0$ durch die Luftreibung gebremst wird. Die Geschwindigkeit $v(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -\alpha v - \beta v^2, \qquad \alpha, \beta \geq 0. \tag{5}$$

$m\alpha v$ und $m\beta v^2$ sind die Beträge der *Stokes'schen* und der *Newton'schen* Reibungskraft.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{\alpha v + \beta v^2}$ für $\alpha \neq 0$.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $v(t)$. Achten Sie beim Integrieren darauf, dass das Argument des Logarithmus' dimensionslos ist. Drücken Sie die Integrationskonstante durch v_0 aus. Zeichnen Sie $v(t)$ für $0 \leq t \leq 20s$ für den Fall $v_0 = 36m/s$, $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-2} s^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-3} m^{-1}$. Tragen Sie in die selbe Zeichnung die Lösungen für die Fälle ein, dass $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ gesetzt wird.

Hinweise: Sie können analog zur Gl. (10) der Vorlesung vorgehen. Betrachten Sie die Fälle

$\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ getrennt.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.
Zeichnen Sie den Weg $x(\infty) - x_0$, den das Fahrzeug zum Ausrollen braucht, als Funktion von α für $0 < \alpha \leq 2,5 \cdot 10^{-2} s^{-1}$ für die in b) angegebenen Werte von v_0 und β.
Hinweis: Substituieren Sie $z = e^{-\alpha t}$, um das Integral über $v(t)$ zu lösen.