

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 7: Wir betrachten ein Objekt mit Masse m , das sich durch die Luftreibung gebremst unter dem Einfluss einer äußeren Kraft $m\gamma$ bewegt. Die Geschwindigkeit $v(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{v} = \gamma - \alpha v - \beta v^2 \quad \alpha, \beta, \gamma > 0. \quad (1)$$

Beispiele für diese Situation sind der Fall eines Objekts (aus nicht zu großer Höhe) in der Erdatmosphäre (wobei γ der konstanten Erdbeschleunigung g entspricht) oder das Fahrzeug aus Aufgabe 6, wobei dann $m\gamma$ die Kraft ist, mit der der Motor das Fahrzeug antreibt. Anstatt analog zur Aufgabe 6 vorzugehen, wählen wir einen Lösungsweg, der physikalisch intuitiver ist und zudem zu kürzeren Ausdrücken in den Zwischenschritten führt.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie eine zeitlich konstante Lösung $v(t) = v_c$ mit positiver Konstante v_c . Was können Sie zur Summe aus äußerer Kraft $m\gamma$ und Reibungskraft $-m\alpha v - m\beta v^2$ für diese spezielle Lösung sagen?

b) (2 Punkte) Schreiben Sie $v(t) = w(t) + v_c$ mit dem in a) bestimmten v_c und leiten Sie aus Gl. (1) eine Differentialgleichung für w her. Eliminieren Sie in dieser Gleichung γ durch v_c .

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $w(t)$, wobei die Integrationskonstante durch $w_0 := w(0)$ auszudrücken ist. Unterscheiden Sie die Fälle i) $w_0 > 0$, ii) $w_0 = 0$ und iii) $-v_c \leq w_0 < 0$. Geben Sie in allen Fällen die Grenzggeschwindigkeit $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ an. In welchen Fällen wird das Objekt beschleunigt bzw. verzögert?

Hinweise: Wegen $v \geq 0$ ist $w \geq -v_c$. Was wissen Sie über das Vorzeichen von $w + \frac{\alpha}{\beta} + 2v_c$?

Unterscheiden Sie schon beim Integrieren die Fälle $w > 0$, $w = 0$ und $w < 0$.

Aufgabe 8: Horizontaler Wurf: Ein Stein wird zur Zeit $t = 0$ aus der Höhe $y(0) = h$ waagrecht mit Geschwindigkeit $v_0 \geq 0$ geworfen, d.h. die x - und y -Komponenten seiner Geschwindigkeit sind $\dot{x}(t) = v_x(t) = v_0$ und $\dot{y}(t) = v_y(t) = -gt$, wobei g die (konstante) Erdbeschleunigung bezeichnet. Vernachlässigen Sie die Luftreibung.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Höhe $y(t)$. Zu welchem Zeitpunkt T erreicht der Stein den Erdboden?

b) (4 Punkte) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg

$$s = \int_0^T dt \sqrt{|\vec{v}|^2} = \int_0^T dt \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \int_0^T dt \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Bilden Sie zur Überprüfung den Grenzwert $v_0 \rightarrow 0$.

Hinweis: $\operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.