Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 5

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 24.11.2023, 12 Uhr
Besprechung: 1.12.2023

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 9: Auf ein Teilchen der Masse m wirke eine Stokes'sche Reibungskraft und eine äußere periodische Kraft $mb\sin(\Omega t)$. Die Geschwindigkeit $v(t)$ erfüllt

$$\dot{v} = -\alpha v + b\sin(\Omega t), \qquad\qquad \alpha, b, \Omega > 0. \tag{1}$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Stammfunktion (inkl. Integrationskonstante) von $\sin(\Omega t)e^{\alpha t}$.
Hinweis: Verwenden Sie $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ und drücken Sie das Ergebnis durch $\sin(\Omega t)$ und $\cos(\Omega t)$ aus.

b) (2 Punkte) Lösen Sie Gl. (1) mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Betrachten Sie nur den Fall $v(t) \geq 0$.
Hinweis: Sie können eine Formel aus dem Arbeitsheft direkt verwenden.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg $x(t)$ für $x(0) = 0$.

d) (1 Punkt) Gl. (1) ist nur sinnvoll für $v \geq 0$. Vergewissern Sie sich, dass $v(t)$ für $t > 0$ zunächst positiv ist, und bestimmen Sie für den Fall $\alpha \gg \Omega$ den Zeitpunkt T mit $v(T) = 0$. Bestimmen Sie $x(T)$.

Aufgabe 10: Eine Ameise befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x_0 \geq 0$ eines Gummibandes, das bei $x = 0$ eingespannt ist. Die Länge des Gummibandes ist $L(t) = L_0 + v_G t$, d.h. es wird mit der konstanten Geschwindigkeit v_G gedehnt. Die Ameise läuft mit (in Bezug auf das Gummiband) konstanter Geschwindigkeit v_A auf das Ende des Gummibandes zu. Parameter, die in die Kompetenz anderer KIT-Fakultäten fallen (Lebensdauer der Ameise, Zerreißlänge des Gummibandes) werden auf ∞ gesetzt.

a) (1 Punkt) Verifizieren Sie, dass der im Intervall $[t, t + dt]$ zurückgelegte Weg der Ameise $dx = v_A dt + v_G \frac{x(t)}{L(t)} dt$ ist.
Betrachten Sie $r(t) = x(t)/L(t)$ und drücken Sie $\dot{r}$ durch L_0, v_G und v_A aus.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie $r(t)$. (Achten Sie dabei auf die Anfangsbedingung $r(0) = x_0/L_0$.) Geben Sie die Zeit T an, zu der die Ameise den Endpunkt $x = L$ erreicht hat.

c) (1 Punkt) Betrachten Sie den Fall $L_0 = 1\,m$, $v_G = 1\,\frac{m}{s}$, $v_A = 1\frac{cm}{s}$.
Wann erreicht die Ameise im Fall $x_0 = 0$ das Ende? Geben Sie T in Vielfachen des Alters des Universums von $13{,}8 \cdot 10^9$ Jahren an.
Inwieweit verbessert sich die Lage, wenn die Ameise einen Vorsprung $x_0 = L_0/2 = 0{,}5\,m$ bekommt?

d) (1 Punkt) Für $x_0 = 0$ betrachten wir nun eine diskretisierte Version des Problems: Im Intervall $[(n-1)\Delta t, n\Delta t]$, $n \in \mathbb{N}$, läuft zunächst die Ameise um ein Stück Δx, danach (zum Zeitpunkt $n\Delta t$) wird das Gummiband instantan von der Länge nL_0 auf die Länge $(n+1)L_0$ gedehnt. x_n bezeichne den Ort der Ameise nach dem n-ten Schritt (jedoch noch vor dem anschließenden Dehnen des Bandes), und wir betrachten $r_n = x_n/(nL_0)$, d.h. nach dem ersten Schritt ist $r_1 = \Delta x/L_0$. Welchen Fortschritt $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$ (für $k \geq 2$) macht die Ameise im k-ten Schritt? Zeigen Sie, dass r_n proportional zur *harmonischen Summe* ist: $r_n = \dfrac{\Delta x}{L_0} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

e) (1 Punkt) Während Physiker*innen Integrale leicht von der Hand gehen, bereiten ihnen Summen oft Schwierigkeiten. Die *Euler-Maclaurin-Formel* erlaubt es, eine Summe durch ein Integral anzunähern:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \;=\; \int_1^n dx f(x) \;+\; \frac{f(n)+f(1)}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1) \right) + R_{2l}, \quad (2)$$

wobei das Restglied R_{2l} in der Näherung vernachlässigt wird. $f^{(j)}$ steht für die j-te Ableitung von f, und die *Bernoulli-Zahlen* B_j sind $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30\ldots$. Wir betrachten $r_3 = \dfrac{11}{6}\dfrac{\Delta x}{L_0}$ und $r_{20} = 3.59774\dfrac{\Delta x}{L_0}$. Berechnen Sie für beide Zahlen die Näherungen aus Gl. (2) für die Fälle $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$.

Hinweise: Sie können d) und e) auch dann lösen, wenn Sie a)-c) nicht bearbeitet haben.