Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 6

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 1.12.2023, 12 Uhr
Besprechung: 8.12.2023

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 11: Archimedische Spirale:
Ein Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)-Ebene mit

$$x(t) = ct\,\sin\omega t,$$
$$y(t) = ct\,\cos\omega t \qquad \text{und } c > 0.$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}$,

c) (1 Punkt) Zeichnen Sie die Spirale für $0 \leq t \leq 6\pi/\omega$, wobei Sie c so wählen, dass das Bild die halbe Breite Ihres Blatt Papiers einnimmt. Zeichnen Sie $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ für $t = 2\pi/(3\omega)$ und $t = 17\pi/(4\omega)$ in Ihre Abbildung ein.

d) (1 Punkt) Beweisen Sie

$$\int dx\,\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \frac{ac - b^2}{2a^{3/2}} \operatorname{arsinh} \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} + \frac{ax + b}{2a}\sqrt{ax^2 + 2bx + c} + C,$$

falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

e) (1 Punkt) Bestimmen Sie den vom Massenpunkt zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$ zurückgelegten Weg $\int_0^T dt\,|\vec{v}(t)|$ (also die Bogenlänge der Spirale).

Aufgabe 12: Massenpunkt in viskoser Flüssigkeit:
Auf einen Massenpunkt wirke eine Stokes'sche Reibungskraft und die Gewichtskraft, letztere entlang der negativen y-Achse. Der Geschwindigkeitsvektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ mit

$$\dot{v}_x \;=\; -\alpha v_x, \qquad \dot{v}_y \;=\; -\alpha v_y - g \qquad \text{und } \alpha, g > 0.$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $v_x(t)$. Drücken Sie das Ergebnis durch die Anfangsgeschwindigleit $v_{x0} := v_x(0)$ aus.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $v_y(t)$ für $v_y(0) = 0$.

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie den vom Massenpunkt zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$ zurückgelegten Weg.

Hinweise: Wählen Sie eine Substitution, um auf ein Integral der Form $\int dz \sqrt{b^2 + (z-1)^2/z^2}$ zu kommen und substituieren Sie dann $z = 1/(1 - bw)$, gefolgt von $w = \sinh u$ und einer weiteren Substitution. Tipp: Es wird etwas einfacher, wenn Sie durch partielle Integration bzgl. w die Wurzel in den Nenner bringen.