Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 8

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 15.12.2023, 12 Uhr
Besprechung: 22.12.2023

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 15: Drehungen im dreidimensionalen Raum werden durch 3×3-Matrizen beschrieben:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z \\ R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z \\ R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\vec{r}.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Komponenten der Drehmatrizen $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$ und $R_z(\phi)$, die Drehungen des Koordinatensystems um die x, y bzw. z-Achse um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn, wenn man in negativer Richtung der entsprechenden Achse blickt) beschreiben.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Matrizen

$$\omega^{(1)} = \frac{d}{d\phi} R_x(\phi)\bigg|_{\phi=0}, \qquad \omega^{(2)} = \frac{d}{d\phi} R_y(\phi)\bigg|_{\phi=0}, \qquad \omega^{(3)} = \frac{d}{d\phi} R_z(\phi)\bigg|_{\phi=0},$$

indem Sie die Komponenten der Matrizen $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$ und $R_z(\phi)$ nach ϕ differenzieren. Drücken Sie die Komponenten $\omega^{(l)}_{jk}$ der Matrizen $\omega^{(l)}$ durch das dreidimensionale Levi-Civita-Symbol ϵ_{ljk} aus. ϵ_{ljk} ist definiert durch $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{ljk} = \epsilon_{klj}$ (Zyklizität) und $\epsilon_{ljk} = -\epsilon_{jlk}$ (Antisymmetrie), erfüllt also

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \qquad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1, \\ \epsilon_{jjk} &= \epsilon_{jkj} = \epsilon_{kjj} = 0 \qquad \text{für } j, k \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_x(\phi_1)R_z(\phi_3)$ und $R_z(\phi_3)R_x(\phi_1)$. Welche Koordinatentransformationen werden durch die zwei Matrixprodukte beschrieben? Sind die Ergebnisse gleich? Entwickeln Sie die zwei Matrixprodukte um $\phi_1 = \phi_3 = 0$ zur ersten Ordnung in ϕ_1 und ϕ_3 und drücken Sie ihr Ergebnis durch die Matrizen $\omega^{(i)}$ aus. Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung $\phi_1\phi_3$.
Hinweis: Die Taylor-Entwicklungen von $\sin\phi$ und $\cos\phi$ sind $\sin\phi = \phi + \mathcal{O}(\phi^3)$ und $\cos\phi = 1 - \phi^2/2 + \mathcal{O}(\phi^4)$.

Aufgabe 16: Die Matrix R mit $R^T R = \mathbb{1}$ und $\det R = 1$ beschreibe eine Drehung um die Achse $\vec{n}$ (mit $|\vec{n}| = 1$) mit dem Winkel ϕ.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie $(R - R^T)\vec{n} = 0$.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Achse $\vec{n}$ für

$$R = \begin{pmatrix} c + a^2(1-c) & a\sqrt{1-a^2}(1-c) & -\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2} \\ a\sqrt{1-a^2}(1-c) & c + (1-a^2)(1-c) & a\sqrt{1-c^2} \\ \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2} & -a\sqrt{1-c^2} & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $|\phi|$ zur Matrix R in Gl. (1). Sie dürfen ohne Beweis die Formel $\operatorname{tr} R := R_{11} + R_{22} + R_{33} = 1 + 2\cos\phi$ verwenden.

d) (1 Punkt) Es ist praktischer, wenn man in Koordinatensystemen arbeitet, in denen die Drehachse mit der z-Achse übereinstimmt. Geben Sie die Drehmatrix $\hat{R}$ an, die die gewünschte Koordinatentransformaton leistet, also für eine vorgegebene Achse $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T \neq \pm\vec{e}_z$ $\hat{R}\vec{n} = \vec{e}_z$ erfüllt, und zudem $\vec{a} = (n_2, -n_1, 0)^T / \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ mittels $\hat{R}\vec{a} = \vec{e}_y$ auf die y-Achse dreht. Achtung: Hier ist nicht die Matrix aus Gl. (1) gemeint, sondern $\vec{n}$ ist beliebig.

e) (1 Punkt) $R(\phi\vec{n})$ und $R'(\phi\vec{e}_z)$ beschreiben die betrachtete Drehung im ursprünglichen und im mit $\hat{R}$ gedrehten Koordinatensystem. Beweisen Sie $R'(\phi\vec{e}_z) = \hat{R}\,R(\phi\vec{n})\,\hat{R}^T$.

QR-Code zur Evaluation der Vorlesung:

QR-Code zur Evaluation der Übung:

Bitte bringen Sie zur Vorlesung am 11.12.2023 einen Laptop oder Notebook-Rechner sowie diese QR-Codes mit. Die Links zu den Evaluationsbögen teile ich Ihnen in der Vorlesung mit.

Ihre Tutorgruppe können Sie am 15.12.2023 evaluieren; Ihr Tutor teilt Ihnen QR-Code und Link mit.