Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 9

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 5.1.2024, 12 Uhr
Besprechung: 12.1.2024

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 17: Sonnenauf- und -untergang: Wir betrachten zunächst ein kartesisches Koordinatensystem (X', Y, Z) mit Ursprung im Zentrum der Sonne. Wir idealisieren die Erdbahn als Kreis um diesen Ursprung, sie verlaufe in der (X', Y)-Ebene. Die X'-Achse ist dabei so gewählt, dass sie zu jedem Zeitpunkt den Erdmittelpunkt durchsticht. (Dieses Koordinatensystem dreht sich also im Jahresverlauf mit der Drehung der Erde um die Sonne einmal um den Ursprung.) Im nächsten Schritt verschieben wir mittels $X = X' - A$ das Koordinatenssystem um den Radius A der Erdumlaufbahn, so dass der Punkt $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ dem Erdmittelpunkt entspricht. Die Blickrichtung von der Erde zur Sonne ist also $\vec{S} = (-1, 0, 0)$. Die Erdachse in diesem Koordinatensystem ist

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \cos(\Omega T) \\ -\sin\theta_0 \sin(\Omega T) \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei T die Zeit und $\Omega \simeq \frac{2\pi}{365{,}25 \text{ Tage}}$ die Kreisfrequenz des Erdumlaufs ist.

a) (2 Punkte) Zeichnen Sie die Position der Erde (in Bezug zur Sonne) für die Fälle i) $T = 0$ (Wintersonnenwende) und ii) $T = \frac{\pi}{2\Omega}$ (Frühlingsäquinoktium, Tagundnachtgleiche im Frühling). Zeichen Sie für beide Fälle die X- und Y-Achse und den Nordpol ein.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie die Drehmatrix $D = D_2 D_1$ mit

$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & 0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = \begin{pmatrix} \cos(\Omega T) & -\sin(\Omega T) & 0 \\ \sin(\Omega T) & \cos(\Omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und betrachten Sie das mit D gedrehte Koordinatensystem, $\vec{r} = D\vec{R}$, wobei $\vec{r} = (x, y, z)^T$ und $\vec{R} = (X, Y, Z)^T$ ist. Berechnen Sie $\vec{n} = D\vec{N}$ und bestätigen Sie, dass $\vec{n} = (0, 0, 1)^T$ ist, die z-Achse also mit der Erdachse übereinstimmt. Welche Bedeutung hat θ_0?

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Blickrichtung von der Erde zur Sonne im gedrehten Koordinatensystem: $\vec{s} = D\vec{S}$. (Da der Erdradius b sehr klein gegen A ist, dürfen wir annehmen, dass die Blickrichtung $\vec{s}$ von jedem Punkt der Erdkugel gleich ist.)

NB: Die folgenden Teilaufgaben geben Bonuspunkte. Das heißt man kann auf diesem Blatt bis zu 15 von 10 Punkten erreichen.

Funktion	Näherung
$\sin(\Omega T)$	$\Omega T - (\Omega T)^3/6$
$\cos(\Omega T)$	$1 - (\Omega T)^2/2 + (\Omega T)^4/24$
$\arctan(\alpha \tan(\Omega T))$	$\alpha\Omega T + (\alpha - \alpha^3)(\Omega T)^3/3$
$1/(a_0 + a_2(\Omega T)^2 + a_4(\Omega T)^4)$	$1/a_0 - a_2/a_0^2(\Omega T)^2 + (a_2^2 - a_0 a_4)/a_0^3(\Omega T)^4$

Tabelle 1: Nützliche Näherungen für Aufgabe 17e).

d) (2 Bonuspunkte) Ein Punkt auf der Erdoberfläche sei durch

$$\vec{r} = b \begin{pmatrix} \sin\theta\cos(\omega(t-t_0)) \\ \sin\theta\sin(\omega(t-t_0)) \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

gegeben. $90° - \theta$ ist die geographische Breite, $\omega = \frac{2\pi}{24\,\mathrm{h}}$ ist die Kreisfrequenz der Erddrehung und t ist die Tageszeit. t_0 wird so bestimmt, dass $t = 0$ Mitternacht (Ortszeit) entspricht. Tagsüber ist $\vec{r}\cdot\vec{s} \geq 0$, nachts hingegen $\vec{r}\cdot\vec{s} \leq 0$. (Warum?). Am nördlichen Polarkreis ist am Tag der Wintersonnenwende die Bedingung $\vec{r}\cdot\vec{s} \geq 0$ zu genau einem Zeitpunkt t erfüllt. Der nördliche Polarkreis verläuft bei $66°33'55''$ nördlicher Breite. Bestimmen Sie aus dieser Information den Winkel θ_0.

e) (3 Bonuspunkte) Zunächst bestimmen Sie t_0 aus der Bedingung, dass $\vec{r}\cdot\vec{s}$ für $t = 0$ extremal wird. Betrachten Sie dann die Bedingung für Sonnenauf- bzw. -untergang, $\vec{r}\cdot\vec{s} = 0$. Da die Tage des frühesten Sonnenuntergangs bzw. des spätesten Sonnenaufgangs, die wir nun bestimmen wollen, in der Nähe der Wintersonnenwende liegen, dürfen wir die Näherungen aus Tabelle 1 zur Berechnung von $\vec{r}\cdot\vec{s}$ verwenden. (Beim Ausmultiplizieren von Produkten dürfen Sie Terme der Ordnung $(\Omega T)^5$ und höher weglassen.) Lösen Sie die Gleichung $\vec{r}\cdot\vec{s} = 0$ mit diesen Näherungen nach $\cos(\omega t)$ auf. Die Lösung sollte nach Anwenden der Näherungen ein Polynom in (ΩT) sein. Den Tag des frühesten Sonnenuntergangs bzw. des spätesten Sonnenaufgangs findet man durch Lösen von $\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{s})}{\partial T} = 0$. Lösen Sie diese Gleichung nach T auf, wobei Sie Terme der Ordnung $(\Omega T)^4$ und höher vernachlässigen dürfen und die Lösung für $\cos(\omega t)$ nach dem Ableiten einsetzen. Welches Ergebnis finden Sie für die geographische Breite von Karlsruhe, 49° nördlicher Breite?

Ergänzender Hinweis für interessierte Studierende: Die Bedingung $\vec{r}\cdot\vec{s} = 0$ definiert eine sog. *implizite Funktion* $t(T)$, die die Tageszeit t des Sonnenauf- bzw. -untergangs als Funktion der Jahreszeit T bestimmt. Über die Kettenregel findet man nun $0 = \frac{d\vec{r}\cdot\vec{s}}{dT} = \frac{\partial\vec{r}\cdot\vec{s}}{\partial T} + \frac{\partial\vec{r}\cdot\vec{s}}{\partial t}\frac{dt}{dT}$. Uns interessieren die Extrema der Funktion $t(T)$, also die Lösungen von $\frac{dt}{dT} = 0$. Die vorstehende Gleichung zeigt, dass wir dazu $\frac{\partial\vec{r}\cdot\vec{s}}{\partial T} = 0$ lösen müssen, wobei zusätzlich $t(T)$ die Nebenbedingung $\vec{r}\cdot\vec{s} = 0$ erfüllen muss.

Aufgabe 18: Wir betrachten die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x}_\delta + m\alpha\dot{x}_\delta + kx_\delta = c\,\delta_\tau(t-t') \qquad \text{mit } m, \alpha, k, c > 0, \tag{4}$$

wobei der inhomogene Term einen *Kraftstoß* der Länge 2τ um den Zeitpunkt $t = t'$ beschreibt:

$$\delta_\tau(t) = \frac{\theta(\tau - t)\theta(t+\tau)}{2\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & \text{für } -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

(Die *Heavyside-Funktion* θ ist definiert über $\theta(t) = 0$ für $t < 0$ und $\theta(t) = 1$ für $t \geq 0$.)
Wir lösen Gl. (4) mit dem Ansatz:

$$x_\delta(t) = \begin{cases} A_{11}e^{-B(t-t')}\sin\big(\omega(t-t')\big) \\ \quad + A_{12}e^{-B(t-t')}\cos\big(\omega(t-t')\big) & \text{für } t \leq t'-\tau, \\ A_{21}e^{-B(t-t')}\sin\big(\omega(t-t')\big) \\ \quad + A_{22}e^{-B(t-t')}\cos\big(\omega(t-t')\big) + \dfrac{c}{2k\tau} & \text{für } t'-\tau \leq t \leq t'+\tau, \\ A_{31}e^{-B(t-t')}\sin\big(\omega(t-t')\big) + \\ \quad + A_{32}e^{-B(t-t')}\cos\big(\omega(t-t')\big) & \text{für } t \geq t'+\tau, \end{cases} \tag{6}$$

wobei $A_{11}, \ldots A_{32}$ reelle Konstanten sind und $B, \omega \geq 0$.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie B und ω für die Fälle (i) $\alpha^2 < 4\dfrac{k}{m}$ (schwache Dämpfung) und (ii) $\alpha^2 > 4\dfrac{k}{m}$ (starke Dämpfung).

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir nur Fall (i).

b) (1 Punkt) Um $A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}$ durch A_{11} und A_{12} auszudrücken, verwenden wir die Stetigkeit von $x_\delta(t)$ und $\dot{x}_\delta(t)$ bei $t = t' - \tau$ und $t = t' + \tau$. Zeigen Sie, dass sich diese Bedingungen als

$$M_{-\tau}\left[\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{c}{2k\tau} \\ 0 \end{pmatrix} = M_{+\tau}\left[\begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix}\right] \tag{7}$$

schreiben lassen, und bestimmen Sie die 2×2-Matrizen $M_{\pm\tau}$.

c) (1 Punkt) Invertieren Sie $M_{\pm\tau}$, um

$$\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} - M_{-\tau}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{c}{2k\tau} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

zu bestimmen. (Sie dürfen das Ergebnis so stehen lassen und brauchen $M_{-\tau}^{-1}(\frac{c}{2k\tau}, 0)^T$ nicht auszumultiplizieren; es ist hier nur verlangt, dass Sie $M_{\pm\tau}$ inverierten.) Drücken Sie analog zu Gl. (8) $(A_{31}, A_{32})^T$ durch $(A_{11}, A_{12})^T$ aus.

d) (1 Punkt) $G(t-t') := \lim\limits_{\tau\to 0} x_\delta(t)/c$ heißt *Greensche Funktion* (oder *Green-Funktion*) der DGL (4). Bestimmen Sie die durch $A_{11} = A_{12} = 0$ definierte *retardierte* und die durch $A_{31} = A_{32} = 0$ definierte *avancierte* Greensche Funktion. Wie hängen sie miteinander zusammen? (Hinweis: Welche DGL erfüllt $G(-t+t')$?)

e) (1 Punkt) Zeigen Sie: Eine Lösung von

$$m\ddot{x} + m\alpha\dot{x} + kx = f(t) \qquad \text{mit einer stetigen Funktion } f \tag{9}$$

ist durch

$$x(t) = \int dt'\, G(t-t')f(t') \tag{10}$$

gegeben. Mit Hilfe einer Greensche Funktion kann man also jede inhomogene DGL lösen!

Ergänzende Information: $\delta(t) := \lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)$ heißt δ-*Funktion*. Es ist eine sog. *Distribution* oder *verallgemeinerte Funktion*, die nur integriert à la $\int dt'\,\delta(t-t')f(t') := \lim_{\tau\to 0}\int dt'\,\delta_\tau(t-t')f(t') = f(t)$ sinnvoll ist.