Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 10

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 12.1.2024, 12 Uhr
Besprechung: 19.1.2024

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 19:

a) (0,5 Punkte) Begründen Sie, dass $\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn}$ nur dann von null verschieden sein kann, wenn entweder $(k,l) = (m,n)$ oder $(k,m) = (n,l)$ ist.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie im Ansatz

$$\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn} = a\,\delta_{km}\delta_{ln} + b\,\delta_{kn}\delta_{ml}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

die Zahlen a und b, indem Sie Gl. (1) auf Gl. (135) der Vorlesung zurückführen.

c) (1 Punkt) Nutzen Sie Gl. (1), um $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ zu berechnen.

d) (0,5 Punkte) Zeigen Sie für die 3×3-Matrizen $\omega^{(j)}$ aus Gl. (131) der Vorlesung:

$$(\vec{n} \cdot \vec{\omega})^2 = \vec{n}\vec{n}^{\,T} - \mathbb{1}, \tag{2}$$

wobei $\vec{\omega} = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)})^T$ und $|\vec{n}| = 1$ ist.

e) (1 Punkt) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(\vec{n} \cdot \vec{\omega})^{2n+2} = (-1)^n \left(\vec{n}\vec{n}^{\,T} - \mathbb{1}\right), \qquad (\vec{n} \cdot \vec{\omega})^{2n+1} = (-1)^n\, \vec{n} \cdot \vec{\omega}. \tag{3}$$

f) (1 Punkt) Zeigen Sie für $\vec{\phi} = \phi\,\vec{n}$:

$$R(\vec{\phi}) = \exp(\vec{\phi} \cdot \vec{\omega}) = \mathbb{1}\cos\phi + \vec{\phi}\vec{\phi}^{\,T}\frac{1-\cos\phi}{\phi^2} + (\vec{\phi} \cdot \vec{\omega})\frac{\sin\phi}{\phi},$$

indem Sie die Exponentialreihe geeignet aufteilen und Gl. (3) verwenden.

Aufgabe 20: Resonanzkatastrophe:

a) (2 Punkte) Lösen Sie

$$m\ddot{x} + m\alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t) \tag{4}$$

mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion

$$G(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t', \\ \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha(t-t')/2} \sin\left[\omega(t-t')\right] & \text{für } t \ge t', \end{cases}$$

wobei $\omega = \sqrt{k/m - \alpha^2/4}$ ist, als $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')F_0 \cos\left(\Omega t'\right)$.

b) (1 Punkt) Für welche Frequenz Ω wird die Amplitude $A := \max|x(t)|$ maximal? Diese Frequenz heißt Resonanzfrequenz. Berechnen Sie A für diese Resonanzfrequenz.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Energie der schwingenden Masse $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$ für den Fall, dass Ω gleich der Resonanzfrequenz ist.