Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 11

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Abgabe: 19.1.2024, 12 Uhr
Besprechung: 26.1.2024

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 21: Galilei-Transformationen

Jede eigentliche Galilei-Transformation ist eindeutig bestimmt durch eine Drehmatrix S, eine Relativgeschwindigkeit $\vec{w}$, einen Translationsvektor $\vec{a}$ und eine Zeitverschiebung t_0. Eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ transformiert unter der Galilei-Transformation $G(S, \vec{w}, \vec{a}, t_0)$ wie folgt:

$$\vec{r}\,'(t') = \vec{r}\,'(t + t_0) = S\vec{r}(t) + \vec{w}t + \vec{a}\ .$$

a) (1 Punkt) Wie transformieren die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$ der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ unter der Galilei-Transformation $G(S, \vec{w}, \vec{a}, t_0)$?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$ ist und drücken Sie dann $\frac{d}{dt'}\vec{r}\,'(t')$ durch $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ aus.

b) (2 Punkte) Führen Sie zwei Galilei-Transformationen $G_1(S_1, \vec{w}_1, \vec{a}_1, t_{01})$ und $G_2(S_2, \vec{w}_2, \vec{a}_2, t_{02})$ hintereinander aus und bestimmen Sie Drehmatrix, Relativgeschwindigkeit, Translationsvektor und Zeitverschiebung der resultierenden Transformation.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie Drehmatrix, Relativgeschwindigkeit, Translationsvektor und Zeitverschiebung der *inversen* Galilei-Transformation G^{-1}, also derjenigen Transformation, die $G(S, \vec{w}, \vec{a}, t_0)$ rückgängig macht.

d) (1 Punkt) Die Newtonsche Gravitationskraft, die ein Teilchen der Masse m_2 am Ort $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_2(t)$ auf ein Teilchen der Masse m_1 am Ort $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_1(t)$ ausübt, ist

$$\vec{F}_{12}(t) = G_N m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3}\ . \tag{1}$$

Dabei ist G_N die Newtonsche Gravitationskonstante. Bestimmen Sie das Transformationsverhalten der Kraft $\vec{F}_{12}(t)$ unter der Galileitransformation $G(S, \vec{w}, \vec{a}, t_0)$, indem Sie in Gl. (1) die Ortsvektoren $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$ mit Hilfe von G^{-1} durch $\vec{r}\,'_1(t')$ und $\vec{r}\,'_2(t')$ ausdrücken. Was fällt Ihnen bzgl. der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$ auf, in welchen Inertialsystemen ist sie gültig?

Aufgabe 22:

a) (1 Punkt) $y_a(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ mit beliebigen Konstanten C_1, C_2 sei die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0,$$

und $y_\mathrm{s}^\mathrm{inh}(t)$ sei eine Lösung der inhomogenen DGL

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = g(t). \tag{2}$$

(Der Index s steht für „speziell".) Beweisen Sie, dass die allgemeine Lösung von Gl. (2) durch

$$y_\mathrm{a}^\mathrm{inh}(t) \ = y_\mathrm{a}(t) + y_\mathrm{s}^\mathrm{inh}(t)$$

gegeben ist. Hinweis: Betrachten Sie die Differenz zweier Lösungen von Gl. (2).

b) (1 Punkt) Betrachten Sie die Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + m\alpha\dot{x} + kx \ = F(t) \ := \ F_0\theta(t)\theta(\tau - t) \tag{3}$$

mit $m, k, \tau > 0$, $\alpha \geq 0$ und schwacher Dämpfung $\alpha^2 < 4k/m$. Die rechte Seite beschreibt also einen zum Zeitpunkt $t = 0$ einsetzenden konstanten Kraftstoß der Länge τ. Bestimmen Sie eine Lösung $x(t)$ von Gl. (3) mit Hilfe der Greenschen Funktion aus Aufgabe 20. Verifizieren Sie, dass für Ihre Lösung $x(t)$ die schwingende Masse für $t \leq 0$ in Ruhe ist.
Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $t \leq 0$, $0 \leq t \leq \tau$ und $\tau \leq t$.

c) (2 Punkte) Mit $dx = x(t + dt) - x(t) = \dot{x}(t)\,dt$ ist $dW := F(t)\,dx = F(t)\dot{x}(t)\,dt$ die zwischen den Zeitpunkten t und $t+$ *dt von der Kraft* $F(t)$ *geleistete Arbeit*. Berechnen Sie für $0 \leq T \leq \tau$ die im Zeitintervall $[0, T]$ von $F(t)$ geleistete Arbeit

$$W(T) \ = \int_0^T dt\, F(t)\dot{x}(t). \tag{4}$$

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Energie $E(T) = \dfrac{m}{2}\left(\dot{x}(T)\right)^2 + \dfrac{k}{2}(x(T))^2$ für $0 \leq T \leq \tau$ und vergleichen Sie $W(T)$ mit $E(T) - E(0) = E(T)$: Für welche Werte der Parameter m, α, k, τ ist $W(T) = E(T)$ für alle T mit $0 \leq T \leq \tau$? Welche physikalische Bedeutung hat $E_\mathrm{Verlust}(T) = W(T) - E(T)$?