Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2023

Übungsblatt 13
Abgabe: 2.2.2024, 12 Uhr
Besprechung: 9.2.2024

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 25: Coriolis- und Zentrifugalkraft: Im Schwerefeld der Erde gilt

$$\dot{\vec{v}} = -g\vec{e}_z - 2\vec{\omega}\times\vec{v} - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(\vec{R}+\vec{r})\right) \qquad \text{mit } \vec{v} = \dot{\vec{r}}. \tag{1}$$

Hier zeigt $\vec{R}$ vom Erdmittelpunkt zum betrachteten Punkt auf der Erdoberfläche, und $\vec{r} = (x,y,z)^T$ bezieht sich auf ein Koordinatensystem an der Erdoberfläche, bei dem die x-Achse nach Süden und die y-Achse nach Osten zeigt. Es ist dann $\vec{\omega} = \omega(-\cos\theta_B, 0, \sin\theta_B)^T$, wobei $\theta_B = \frac{\pi}{2} - \theta$ die geographische Breite bezeichnet. Weiter ist $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, und der mittlere Erdradius beträgt $R = 6.371.000$ Meter.

a) (1 Bonuspunkt) Vernachlässigen Sie zunächst den Zentrifugalterm $-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(\vec{R}+\vec{r})\right)$ und schreiben sie Gl. (1) als

$$\dot{\vec{v}} = -g\vec{e}_z - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,. \tag{2}$$

Wir interessieren uns nur für kleine Geschwindigkeiten, für die der zweite Term, der die Coriolisbeschleunigung beschreibt, als kleine Störung behandelt werden darf. Dazu Entwickeln Sie die Lösung von Gl. (2) als $\vec{v} = \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_\lambda + \mathcal{O}\left(\lambda^2\right)$, wobei $\vec{v}_1$ die Lösung der Gleichung $\dot{\vec{v}}_1 = -g\vec{e}_z$, λ einen kleinen Parameter bezeichnet und sowohl $\vec{\omega}\times\vec{v}_1 = \mathcal{O}(\lambda)$ als auch $\vec{\omega}\times\vec{v}_\lambda = \mathcal{O}(\lambda)$ ist. Bestimmen Sie $\vec{v}_1(t)$, setzen Sie $\vec{v} = \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_\lambda$ in Gl. (2) ein und geben sie die Gleichung für $\dot{\vec{v}}_\lambda$ unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung λ^2 und höher an.

b) (1 Punkt) Geben Sie die Gleichung für $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_\lambda$ an und berechnen Sie die Lösung $\vec{r}(t)$.

c) (1 Punkt) Zur Zeit $t = 0$ sei $\vec{r} = (0,0,h)^T$ und $\vec{v} = 0$. Geben Sie die x- und y-Koordinaten zunächst als Funktion der Fallzeit t an. Bestimmen Sie dann (x,y) beim Auftreffen auf den Boden, also für $z = 0$, als Funktion der Fallhöhe $h = \frac{g}{2}t^2 + \mathcal{O}(\lambda)$.

d) (1 Bonusunkt) Nun sollen sowohl Coriolis- als auch Zentrifugalterm in Gl. (1) als $\mathcal{O}(\lambda)$-Störung berücksichtigt werden. Geben Sie die Gleichung für $\vec{v}_2$ an und berechnen Sie die Lösung $\vec{r}(t)$.
Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme, die klein gegen $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)$ sind.

e) (1 Punkt) Geben Sie Ihr Ergebnis (x,y) für einen Stein an, der aus $500\,m$ Höhe in Karlsruhe auf den Boden fällt.
Hinweis: Karlsruhe hat die Koordinaten: θ_B =49°1' N, ϕ =8°24' O.

Aufgabe 26: In dieser Aufgabe wollen wir die beiden Kraftfelder ($a > 0$)

$$\vec{F}_1(x,y) = a\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \vec{F}_2(x,y) = \frac{a}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

untersuchen.

a) (1 Punkt) Zeichnen Sie Sie beiden Kraftfelder in der x-y Ebene und berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}_1$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}_2$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie nun die geleistete Arbeit, wenn sie einen geschlossenen rechteckigen Weg zurücklegen, berechnen Sie also

$$W_j^{(1)} = \oint \vec{F}_j(x,y) \cdot d\vec{s} = \int_1^3 \vec{F}_j(x,-1)\vec{e}_x\, dx + \int_{-1}^1 \vec{F}_j(3,y)\vec{e}_y\, dy + \int_3^1 \vec{F}_j(x,1)\vec{e}_x\, dx + \int_1^{-1} \vec{F}_j(1,y)\vec{e}_y\, dy \; .$$

Hinweise: (i) Es ist $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ für $x > 0$.
(ii) Die obige Gestalt des Kurvenintegrals erhält man durch die Parametrisierungen

$$\vec{s}(x) = (x, 0, 0)^T \,, \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{s}(y) = (0, y, 0)^T \tag{3}$$

mit x, y in den entsprechenden Grenzen und dem Einsetzen von $\frac{d\vec{s}}{dx}dx$ bzw. $\frac{d\vec{s}}{dy}dy$ in das Kurvenintegral.

c) (1 Punkt) Wiederholen Sie nun die Rechnung für den Fall, dass der Weg den Ursprung enthält, also

$$W_j^{(2)} = \oint \vec{F}_j(x,y) \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \vec{F}_j(x,-1)\vec{e}_x\, dx + \int_{-1}^1 \vec{F}_j(1,y)\vec{e}_y\, dy + \int_1^{-1} \vec{F}_j(x,1)\vec{e}_x\, dx + \int_1^{-1} \vec{F}_j(-1,y)\vec{e}_y\, dy \; .$$

d) (0,5 Punkte) Interpretieren Sie ihre Ergebnisse physikalisch. Was passiert im Ursprung mit $\nabla \times \vec{F}_j$?

e) (1 Punkt) Berechnen Sie für $\vec{F}_2$ das Potential

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}$$

in Zylinderkoordinaten $\rho, \phi, z,$, wobei entlang eines Kreissegmentes mit

$$d\vec{s} = \rho(\varphi - \varphi_0)\vec{e}_\varphi d\sigma \tag{4}$$

der Kurvenparameter σ von 0 bis 1 integriert wird. (Es ist $\vec{F}_2 = \frac{a}{\rho}\,\vec{e}_\varphi$.)

f) (0,5 Punkte) Ist V eine stetige Funktion des Azimutwinkels φ? Welche Eigenschaft muss ein kreissegmentförmiger Weg $\mathcal{E}$ (mit $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ und $\rho = z =$ konstant) haben, damit die Arbeit

$$W = \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{e}_\varphi \, d\varphi$$

durch die Differenz der Potentiale am Anfangs- und Endpunkt gegeben ist?


DIE FACHSCHAFT PHYSIK PRÄSENTIERT DAS
SCHNEE-
EULEN
FEST
GLÜHWEIN
AND
COCKTAILS
SAMSTAG
3.02
START UM
20Uhr
PROFS LEGEN AUF
&
DJ KARIM
EINTRITT FREI
FACHSCHAFT PHYSIK
KIT
AKK
WWW.AKK.ORG
ENGESSERSTRASSE 17,
76131 KARLSRUHE