Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Übungsblatt 14
Abgabe: 9.2.2024, 12 Uhr
Besprechung: 16.2.2024

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Laden Sie Ihre Lösung bitte hoch bei
https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Nummer, Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Dieses Blatt ist eine Übungsklausur, es gibt Bonuspunkte zur Vorleistung 1. Kontrollieren Sie die Zeit und notieren Sie sich, wie weit Sie in 2 Stunden gekommen sind. Wenn Sie mindestens die Hälfte der Punkte erzielt haben, hätten Sie die Klausur auf jeden Fall bestanden. Richtiges Rechnen mit falschem Ansatz gibt keine Punkte.
Studieren Sie zuerst die Formelsammlung am Ende dieser Aufgabenstellungen. Sie dürfen die Formeln ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 1: Verständnisfragen (4 Bonuspunkte)
Kreuzen Sie die richtigen Antworten an, es ist in jeder Teilfrage mindestens eine Antwort richtig. Korrekte Kreuze geben zwei Punkte, falsch gesetzte Kreuze geben -2 Punkte. Ist die Summe aller Punkte von Aufgabe 1 negativ, so werden 0 Punkte verbucht. Begründungen für die Antworten sind nicht erforderlich.

a) $R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$. Welche der folgenden Eigenschaften ist (für beliebiges $\vec{\phi} \neq 0$) erfüllt?

- ☐ $R^T R = \mathbb{1}$
- ☐ $\det R = 1$
- ☐ $R(-\vec{\phi}) = R(\vec{\phi})^T$
- ☐ Die j-te Spalte steht senkrecht auf der k-ten Spalte für $j \neq k$.

b) Kinematik und Dynamik:

- ☐ In jedem Inertialsystem gilt das Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$.
- ☐ Führt ein Körper unter der Einwirkung einer äußeren Kraft $\vec{F}_{12}$ eine beschleunigte Bewegung aus, so wirkt immer auch eine zweite Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ auf diesen Körper *(actio = reactio)*.
- ☐ Der von einem bewegten Körper zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegte Weg hat die Länge $\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}|\, dt$.
- ☐ Ein Weg sei durch den Kurvenparameter u parametrisiert. Der Vektor $\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{du}$ zeigt überall tangential zum Weg.

c) Über dem KIT liegt ein Tiefdruckgebiet. Die einströmende Luft bewegt sich spiralförmig im Gegenuhrzeigersinn, weil…

- [ ] ... die Coriolisbeschleunigung die von Norden (Süden) einströmende Luft nach Westen (Osten) ablenkt und die Zentrifugalbeschleunigung die von Osten (Westen) einströmende Luft nach Norden (Süden) ablenkt.
- [ ] ... die Coriolisbeschleunigung die Luft nach rechts ablenkt,
- [ ] ... die Inklination $\alpha = 65°$ des Erdmagnetfelds zwischen $0°$ und $90°$ liegt,
- [ ] ... sich am KIT alle Prozesse im Kreis drehen.

d) Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ habe in jedem Punkt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$.

- [ ] Eine Masse m erfährt die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.
- [ ] Es gibt zwar i.A. kein Potential, aber für bestimmte Fälle lässt sich ein $V(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ finden.
- [ ] $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ für alle geschlossenen Wege.
- [ ] $W[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ist die auf dem Weg $\mathcal{C}$ von $\vec{F}$ an der bewegten Masse geleistete Arbeit.

Aufgabe 2: Stokes'sche Reibung (3 Bonuspunkte)
v sei die z-Komponente der Geschwindigkeit eines senkrecht fallenden Teilchens, auf das die Gewichtskraft und eine Reibungkraft wirken.
a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $v(t)$ aus der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} \;=\; -g - \alpha v, \qquad \alpha, g > 0, \tag{1}$$

wobei Sie sich auf Lösungen mit $0 \geq v > -\dfrac{g}{\alpha}$ beschränken dürfen. Wählen Sie als Integrationskonstante den Zeitpunkt t_0, für den $v(t_0) = 0$ gilt.
Hinweis: Achten Sie darauf, dass das Argument des Logarithmus positiv ist.
b) (0.5 Punkte) Für $t \to \infty$ konvergiert $v(t)$ gegen eine Grenzgeschwindigkeit v_G. Bestimmen Sie v_G.
Hinweis: Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben.
c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $z(t)$ für die Anfangsbedingung $z(0) = h$, $v(0) = 0$.
d) (0.5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $\alpha t \gg 1$ und bestimmen Sie die Zeit t, zu der das Teilchen für $g = 10\dfrac{m}{s^2}$, $h = 0{,}1\,m$, $\alpha = 10^3\dfrac{1}{s}$ bei $z = 0$ angekommen ist.

Aufgabe 3: Schraubenlinie (3 Bonuspunkte)
Auf ein Teilchen mit Masse m wirke die Kraft

$$\vec{F} \;=\; q\,\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \qquad \vec{B} = B\vec{e}_z \quad \text{mit zeitunabhängigen } q, B > 0. \tag{2}$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}, \qquad R, \omega, v_0 > 0. \tag{3}$$

die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllt, und drücken Sie ω durch q, B und m aus.

b) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie $v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg $s(t) = \int_0^t dt' v(t')$ und invertieren Sie das Ergebnis, um $t(s)$ zu bestimmen.

d) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie $\vec{\tilde{r}}(s) := \vec{r}(t(s))$ und berechnen Sie den Tangentenvektor $\vec{t}(s) = \dfrac{d\vec{\tilde{r}}(s)}{ds}$.

Aufgabe 4: Schwingungsdifferentialgleichung (3 Bonuspunkte)

a) (1 Punkt) Lösen Sie

$$m\ddot{x} + m\alpha\dot{x} + kx \; = F_0\,\theta(t) \tag{4}$$

für $m, k, F_0, \alpha > 0$ und schwache Dämpfung $\alpha^2 < 4k/m$ mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion

$$G(t-t') \; = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t', \\ \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha(t-t')/2} \sin\left[\omega(t-t')\right] & \text{für } t \ge t', \end{cases}$$

wobei $\omega = \sqrt{k/m - \alpha^2/4}$ ist, als $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t') F_0 \theta(t')$.

Hinweise: Unterscheiden Sie die Fälle $t \le 0$ und $t \ge 0$. Die Lösung wird kürzer, wenn Sie $\alpha^2 + 4\omega^2 = 4k/m$ verwenden.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\dot{x}(t)$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie für $T \ge 0$ die von der Kraft im Zeitintervall $[0, T]$ geleistete Arbeit

$$W(T) \; = \int_0^T dt\; F_0\,\dot{x}(t). \tag{5}$$

Aufgabe 5: Coriolis- und Zentrifugalkraft (3 Bonuspunkte)

Der Ort $\vec{r}$ eines Flugzeugs sei durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Flugzeug fliege mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

a) (0.5 Bonuspunkte) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta. \tag{6}$$

b) (1 Bonuspunkt) Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = -\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}, \tag{7}$$

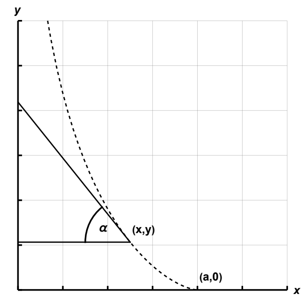
die auf das Flugzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten, also in der Form $\vec{a}_C = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi$ an.

c) (1 Bonuspunkt) Berechnen Sie analog die Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{a}_Z = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{8}$$

d) (0.5 Bonuspunkte) Betrachten Sie das Zahlenbeispiel mit $v_{\text{Süd}} = 0$, $v_{\text{Ost}} = 250\frac{m}{s}$, $\theta = 45°$, $r = 6,4 \cdot 10^6 m$ und $\omega = \frac{3}{4} \cdot 10^{-4}\frac{1}{s}$: Wie groß sind die Südkomponenten $\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_c$ und $\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_Z$? Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen angeben.

Aufgabe 6: Traktrix (4 Bonuspunkte)



Ein Mensch geht auf der y-Achse von $y = 0$ in Richtung $y > 0$ und zieht einen auf rauer Fläche liegenden Gegenstand an einem Seil mit Länge a hinter sich her. Das Seil spannt sich also tangential zur Kurve $(x, y(x))$, die der Gegenstand durchläuft.

a) (1 Punkt) Drücken Sie $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan\alpha$ sowie x durch a und $\cos\alpha$ aus. Hinweis: Welches Vorzeichen hat dy?

b) (0.5 Punkte) Drücken Sie $\frac{dy}{dx}$ durch x und a aus.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $y(x)$ zu $y(a) = 0$.

d) (0.5 Punkte) Wir betrachten nun den zeitabhängigen Weg $(0, Y_M(t))$ des Menschen mit $Y_M(0) = 0$ und $Y_M(t) \geq 0$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}(Y_M - y)^2 + \frac{d}{dt}x^2 = 0$$

e) (0.5 Punkte) Drücken Sie (für $t > 0$) $\dot{y}$ durch $\dot{Y}_M$, x und y aus. Hinweis: $\dot{y} = \dot{x}\frac{dy}{dx}$.

f) (0.5 Punkte) Ist $\dot{y} > \dot{Y}_M$ oder $\dot{y} < \dot{Y}_M$?

Formelsammlung

A: $$\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

B: $$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\phi \\ \sin\theta\,\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\phi \\ \cos\theta\,\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

C: $$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

D: $$\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

E: Geometrische Reihe: $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

F: Heaviside-Funktion: $$\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

G: $$\int e^{-\alpha\tau/2}\sin(\omega\tau)\,d\tau = -2e^{-\alpha\tau/2}\,\frac{2\omega\cos(\omega\tau) + \alpha\sin(\omega\tau)}{\alpha^2 + 4\omega^2}$$

H: $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \;=\; \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) \;-\; \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

I: $$\int_1^b \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\,dz = \sqrt{1-b^2} - \ln\left(\sqrt{1-b^2}+1\right) + \ln b \qquad \text{für } 0 < b \leq 1.$$