

5. Die Zusammenfassung

Kleine Schwingungen mit viele Freiheitsgraden

$$L = \sum_{ij} a_{ij}(\{q_i\}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\{q_i\})$$

1. Wir sollen die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ finden;

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right]$$

2. die untere Gleichung lösen um N Eigenfrequenzen zu finden;

$$\det \left[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right] = 0$$

3. danach diese Gleichung lösen um N Eigenamplituden zu finden. Wir normieren die Amplituden so dass sie "orthogonal" sind.

$$\left(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right) \vec{a}_s = 0, \quad 1 < s < N.$$

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = \delta_{ss'}$$

Danach bekommen wir N Eigenschwingungen des Systems $\vec{\xi}_s = \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad 1 < s < N.$

4. Wir führen Normalkoordinaten $\{r_s\}$ ein und bekommen eine stark vereinfachte Lagrangefunktion

$$\xi_i = \sum_{s=1}^N r_s a_i^{(s)}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right] = \sum_s^N L_s, \quad L_s = \frac{\dot{r}_s^2}{2} - \frac{\omega_s^2 r_s^2}{2}$$

$$r_s(t) = C_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

$$\xi_i(t) = \sum_{s=1}^N C_s a_i^{(s)} \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

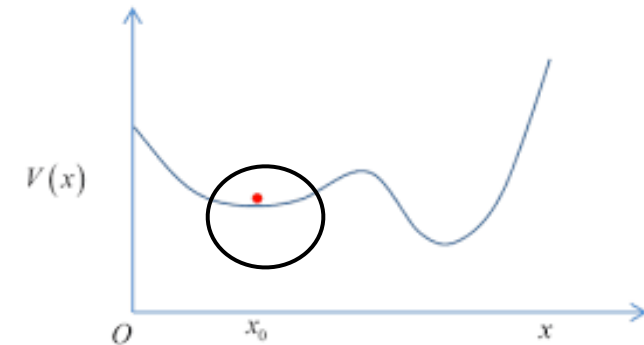
5. Symmetrien die Lagrangefunktion können helfen die Normalkoordinaten und Eigenfrequenzen zu bestimmen.

5. Kleine Schwingungen

Anharmonische Schwingungen:

Die universelle potentielle Energie der Schwingungen erhält man immer durch die Entwicklung allgemeiner potentieller Energie um Gleichgewichtspunkt bis zu zweiter Ordnung.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \xrightarrow{x \rightarrow x - x_0} L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$



$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$$

Der erste Term der Entwicklung ist eine Konstante — irrelevant für Bewegungsgleichungen; der zweite Term ist Null weil x_0 ein Minimum ist; der dritte Term bleibt als führender Beitrag.

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = m\omega^2$$

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$$

Falls wir die potentielle Energie besser beschreiben wollen, bekommen wir zusätzliche Terme in der Taylorentwicklung. Die potentielle Energie kann also als ein Polynom beschrieben werden.

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \xi^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x=x_0} \xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \quad \xi = x - x_0$$

5. Kleine Schwingungen

Unsere Modell für diese Situation ist:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{m\alpha x^3}{3} - \frac{m\beta x^4}{4}$$

Wie unterscheidet sich die Bewegung von einer harmonischen?

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Anharmonische Beiträge zur potentiellen Energie sind klein, kleiner, viel kleiner.. und so weiter

$$\omega_0^2 x^2 \gg \alpha x^3 \gg \beta x^4$$

Um diese Hierarchie klar zu machen, schreiben wir die Lagranfunktion um, indem wir einen kleinen Parameter ϵ explizit einführen

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{m\epsilon\alpha x^3}{3} - \frac{m\epsilon^2\beta x^4}{4}$$

Wir möchten die Störungstheorie in dem Parameter $\epsilon \ll 1$ entwickeln. D.h. wir wollen die Lösung der Bewegungsgleichungen als eine Näherung darstellen welche man systematisch verbessern kann.

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

5. Kleine Schwingungen

Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{m\epsilon\alpha x^3}{3} - \frac{m\epsilon^2\beta x^4}{4}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon\alpha x^2 - \epsilon^2\beta x^3$$

Wir stellen uns vor, dass wir die Trajektorie $x(t)$ und auch die Frequenz als eine Taylorreihe in $\epsilon \ll 1$ schreiben können:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon\omega_1^2 + \epsilon^2\omega_2^2 + \dots$$

Um das explizit zu machen, schreiben wir die Bewegungsgleichung um

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\epsilon\alpha x^2 - \epsilon^2\beta x^3 + \underbrace{(\omega^2 - \omega_0^2)x}_{\mathcal{O}(\epsilon)}$$

und entwickeln beide Seiten in ϵ . Wir fordern dass $\mathcal{O}(\epsilon^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Beiträge auf beiden Seiten gleich sind. Das führt zu einer Reihe von Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k \epsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \epsilon^k, \quad L_k = R_k, \quad \forall k$$

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\alpha x_0^2 + \omega_1^2 x_0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^1)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -2\alpha x_0 x_1 - \beta x_0^3 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$x_0 = a \cos(\omega t)$$

Wir ignorieren eine mögliche Phase um die Rechnung zu vereinfachen.

5. Kleine Schwingungen

Die Bewegungsgleichungen, noch ein mal.

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad \longrightarrow \quad x_0 = a \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\alpha x_0^2 + \omega_1^2 x_0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^1)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -2\alpha x_0 x_1 - \beta x_0^3 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Zweite Näherung:

$$\mathcal{O}(\epsilon^1): \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\alpha a^2 \cos^2(\omega t) + \omega_1^2 a \cos(\omega t) = -\frac{\alpha a^2}{2}(1 + \cos(2\omega t)) + \omega_1^2 a \cos(\omega t)$$

Die obigen Gleichung entspricht eine erzwungenen Schwingung. Wir fordern — aus physikalischen Gründen — dass unharmonische Beiträge zur potentiellen Energie nicht zu unbegrenzten Wachstum der Schwingungsamplitude führen (d.h.. **keine Resonanz ist erlaubt**).

$$\boxed{\omega_1^2 = 0,} \quad x_1 = a_1^{(0)} + a_1^{(1)} \cos(2\omega t), \quad \Rightarrow \quad a_1^{(0)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega^2}, \quad a_1^{(1)} = \frac{\alpha a^2}{6\omega^2}$$

$$x^{(1)} = \left[-\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t) \right]$$

5. Kleine Schwinkungen

Dritte Näherung: $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\alpha x_0^2 + \omega_1^2 x_0, \quad \mathcal{O}(\epsilon^1)$$

$$\boxed{\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -2\alpha x_0 x_1 - \beta x_0^3 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_0,} \quad \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon \omega_1^2 + \epsilon^2 \omega_2^2 + \dots$$

$$x_0 = a \cos(\omega t) \quad \omega_1^2 = 0$$

$$x^{(1)} = \left[-\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t) \right]$$

Die Berechnungen sind ein bisschen komplizierter als vorher aber die Logik ist identisch: Wir schreiben die rechte Seite so um, dass wir "anregende Kräfte" identifizieren. Wir fordern wieder dass es keine Resonanz gibt.

$$\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$$

$$\cos(\omega t) \cos(2\omega t) = \frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(3\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \cos(\omega t) \left[\frac{5}{6} \frac{\alpha^2 a^3}{\omega^2} - \frac{3\beta a^3}{4} + \omega_2^2 a \right] + \cos(3\omega t) \left(-\frac{\alpha^2 a^3}{6\omega^2} - \frac{\beta a^3}{4} \right)$$

Bedingung dass es Keine Resonanz gibt:

$$\left[\frac{5\alpha^2 a^3}{6\omega^2} - \frac{3\beta a^3}{4} + \omega_2^2 a \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2^2 = \frac{5\alpha^2 a^2}{6\omega^2} - \frac{3\beta a^2}{4}$$

Erzwungene Schwingung:

$$x_2 = \left(\frac{\alpha^2 a^3}{48\omega^4} + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \right) \cos(3\omega t)$$

5. Kleine Schwinkungen

Das Endergebnis:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{m\epsilon\alpha x^3}{3} - \frac{m\epsilon^2\beta x^4}{4}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon\alpha x^2 - \epsilon^2\beta x^3$$

$$x(t) = a \cos(\omega t) + \epsilon \left(-\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t) \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\alpha^2 a^3}{48\omega^4} + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \right) \cos(3\omega t) + \dots$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon^2 \left[\frac{5\alpha^2 a^2}{6\omega^2} - \frac{3\beta a^2}{4} \right] + \dots$$

Falls Schwingungen anharmonisch sind...

...ist die Schwingungsfrequenz von der Amplitude abhängig.

...gibt es Frequenzen die proportional zur führenden Frequenz sind $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$