

Zusammenfassung

1. **Anharmonische Schwingungen:** Wir können diese Problem mit Hilfe der Störungstheorie lösen.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{m\epsilon\alpha x^3}{3} - \frac{m\epsilon^2\beta x^4}{4}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon\alpha x^2 - \epsilon^2\beta x^3$$

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k \epsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \epsilon^k, \quad L_k = R_k, \quad \forall k$$

$$x(t) = a \cos(\omega t) + \epsilon \left(-\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t) \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\alpha^2 a^3}{48\omega^4} + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \right) \cos(3\omega t) + \dots$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon^2 \left[\frac{5\alpha^2 a^2}{6\omega^2} - \frac{3\beta a^2}{4} \right] + \dots$$

Falls Schwingungen anharmonisch sind...

...ist die Schwingungsfrequenz von der Amplitude abhängig.

...gibt es Frequenzen die proportional zur führenden Frequenz sind $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$

2. **Hamiltonsche Mechanik:** Eine ganz andere Art Mechanische Systeme zu beschreiben. Im Hamiltonschen Formalismus spielen Impulse und Koordinaten sehr ähnliche Rollen.

6. Hamiltonsche Mechanik

Wir betrachten ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden. Bisher haben wir solche Systemen mit Lagrangefunktionen beschrieben. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten.

$$dL = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$dL = \sum_{i=1}^N \left[\frac{dp_i}{dt} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$$

Die Hamilton-Funktion

$$d \left(L - \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N [\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i] + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H(\{q\}, \{p\}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L$$

$$dH = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Die Hamilton-Funktion sieht ähnlich aus wie die Energie des Systems.

Die Hamiltonschen
Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

6. Hamiltonsche Mechanik

Ein Beispiel: Von Lagrangefunktion zu Hamilton-Funktion. Eine Hamilton-Funktion ist eine Funktion von **Koordinaten und Impulsen**.

Ein Teilchen im Kraftfeld

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}), \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \quad H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen: $\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$

Ein Teilchen im Magnetfeld

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad \vec{H} = [\vec{\partial} \times \vec{A}] \quad \text{Das Magnetfeld}$$

$$\underline{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r})} \quad H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right), & \dot{p}_i &= \frac{e}{c} \frac{1}{m} \left(p_k - \frac{e}{c} A_k \right) \frac{\partial A_k}{\partial r_i} \\ & & \dot{p}_i &= m\ddot{r}_i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial r_k} \dot{r}_k \end{aligned} \right\} \longrightarrow m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\vec{r}} \times \vec{H}]$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Poisson-Klammern: Wir betrachten eine Funktion von Impulse und Koordinaten, die ein mechanisches System beschreiben. Diese Funktion kann auch explizit zeitabhängig sein. Die (volle) Zeitabhängigkeit der Funktion folgt sowohl von expliziter Zeitabhängigkeit als auch von der Zeitabhängigkeit von Impulse und Koordinaten.

$$f = f(\{p_i\}, \{q_i\}, t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$$

Die Poisson-Klammer von zwei Funktionen:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right]$$

Die Bewegungsintegrale ändern sich mit der Zeit nicht; es folgt

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = -\{H, I\}$$

Falls ein Bewegungsintegral I nicht **explizit** zeitabhängig ist, ergibt seine Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion H eine Null.

$$\{H, I\} = 0$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Eigenschaften der Poisson-Klammern

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right]$$

Die Poisson-Klammern sind

antisymmetrisch	$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}$
linear	$\{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}$
distributiv	$\{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} + F_2 \{F_1, F_3\}$

Die Poisson-Klammern erfüllen die **Jacobi Gleichung**

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$$

Die Poisson-Klammer von einer Funktion mit einem Impuls bzw einer Koordinate ist die Ableitung dieser Funktion nach der konjugierten Koordinate bzw. Impuls.

$$\{p_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \{q_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \quad \{p_i, F\} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \right] \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$$

$$\{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, r_j\} = \delta_{ij}$$

Eine Folge der Jacobi-Gleichung: Eine Poisson-Klammer von zwei Bewegungsintegrale ist wieder ein Bewegungsintegral.

$$0 = \{H, I_1\} = \{H, I_2\} \quad 0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \{I_1, \{I_2, H\}\} + \{I_2, \{H, I_1\}\} = \{H, \{I_1, I_2\}\}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Ein Beispiel : Zentralkraft, Drehimpulserhaltung

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - U(r) \quad \vec{\mathcal{M}} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right]$$

$$\{p_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \{q_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\{\mathcal{M}_i, H\} = \epsilon_{ijk} \{r_j p_k, H\} = \epsilon_{ijk} r_j \{p_k, H\} + \epsilon_{ijk} p_k \{r_j, H\}$$

$$\{p_k, H\} = \frac{\partial U(r)}{\partial r_k} = \frac{r_k}{r} \frac{dU(r)}{dr} \quad \{r_j, H\} = -\frac{p_j}{m} \quad \epsilon_{ijk} r_j r_k = 0, \quad \epsilon_{ijk} p_k p_j = 0.$$

$$\{\mathcal{M}_i, H\} = 0$$

Wir sehen, dass der Drehimpulsvektor ein Bewegungintegral ist.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b\} &= \epsilon_{aij} \epsilon_{bnm} \{r_i p_j, r_n p_m\} = \epsilon_{aij} \epsilon_{bnm} (r_i p_m \{p_j, r_n\} + p_j r_n \{r_i, p_m\}) \\ &= \epsilon_{aij} \epsilon_{bnm} (r_i p_m \delta_{jn} - p_j r_n \delta_{im}) \end{aligned}$$

$$\epsilon_{aij} \epsilon_{bmnn} \delta_{jn} = (\delta_{ab} \delta_{im} - \delta_{am} \delta_{bi}) \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{aij} \epsilon_{bmnn} \delta_{jn} r_i p_m = -\delta_{ab} (\vec{p} \vec{r}) + p_a r_b \\ \epsilon_{aij} \epsilon_{bmnn} \delta_{im} r_n p_j = -\delta_{ab} (\vec{p} \vec{r}) + p_b r_a \end{cases}$$

$$\{\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b\} = p_a r_b - p_b r_a = -\epsilon_{abc} \epsilon_{cij} r_i p_j = -\epsilon_{abc} \mathcal{M}_c$$

6. Hamiltonschen Gleichungen

Es ist möglich die Hamiltonschen Gleichungen mit Hilfe des Variationsprinzips herzuleiten.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2 \quad L = p\dot{q} - H \quad p\dot{q} dt = p \frac{dq}{dt} dt = p dq$$

$$S = \int L dt = \int (p dq - H dt) \quad H = H(p, q, t)$$

$$\delta S = \int \left(\delta p dq + p \delta q - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \right)$$

$$\int p \delta q = \int (d(p \delta q) - \delta q dp) = p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \delta q dp = - \int \delta q dp \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

$$\delta S \Rightarrow \int \left(\delta p dq - \delta q dp - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \right) = \int \left(\delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + \delta q \left(-dp - \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \right)$$

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Kanonische Transformationen: Impulse und Koordinaten sind unabhängige Variablen. Es besteht aber die Möglichkeit eine Variablentransformation einzuführen welche Impulse und Koordinaten "mischt". Diese Möglichkeit ist der grosse Vorteil des Hamiltonschen Formalismus.

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$

Die Transformation heisst "kanonisch" falls die Bewegungsgleichungen für Q und P eine hamiltonische Form haben:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad K \quad \text{ist die neue Hamilton-funktion.}$$

Wann ist eine Transformation kanonisch ? Eine Transformation ist kanonisch falls eine Funktion existiert, die von den alten Koordinaten, den neuen Koordinaten und der Zeit abhängig ist, und folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \right|_Q &= p, \\ - \left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \right|_q &= P, \\ K &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Falls eine Transformation kanonisch ist, können wir die Wirkung entweder mit neuen oder mit alten Koordinaten und Impulse schreiben. Die Variationen von beiden müssen Null sein.

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$

$$S = \int (pdq - H(p, q, t)dt) \quad S = \int (PdQ - K(P, Q, t)dt), \quad \delta S = 0$$

$$0 = \delta \int (pdq - Hdt), \quad 0 = \delta \int (PdQ - Kdt)$$

Diese zwei Gleichungen können simultan erfüllt sein, falls sich die Integranden nur um ein totales Differenzial von einer Funktion unterscheiden. Die Verhältnisse zwischen F , p, P, q und Q folgen sofort

$$pdq - Hdt = PdQ - Kdt + dF$$

$$\int dF = F(t_2) - F(t_1) \Rightarrow \delta \int dF = 0$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \right|_Q &= p, \\ - \left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \right|_q &= P, \\ K &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

6. Hamiltonschen Gleichungen

Eine wichtige Eigenschaft der kanonischen Transformationen ist, dass diese Transformationen die Poisson-Klammern invariant lassen. Wir werden diesen Satz für ein-dimensionale Systeme prüfen:

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

$$\{q, p\} = -1 \quad \{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad p = \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_Q, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \Big|_q$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} \Big|_p = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \quad \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_q = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial q}{\partial p} \Big|_q = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{\partial Q}{\partial q} \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \right] - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q}$$

$$\left[-\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} = 1 \quad \left(1 = \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right)$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = -1 = \{Q, P\}_{Q,P}$$

6. Hamiltonischen Gleichungen

Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonische Transformationen

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p}$$

$$F_{1,2} = F_{1,2}(Q, P, t)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p}.$$

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial P} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\}_{q,p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial P} \frac{\partial F_2}{\partial Q} - \frac{\partial F_1}{\partial Q} \frac{\partial F_2}{\partial P} = \{F_1, F_2\}_{Q,P} \end{aligned}$$

$$F_1 = Q, \quad \Rightarrow \{Q, F_2\} = -\frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$$F_1 = P, \quad \Rightarrow \{P, F_2\} = \frac{\partial F_2}{\partial Q}$$