

Zusammenfassung

1. Hamiltonsche Mechanik und die hamiltonschen Gleichungen

$$H(\{q\}, \{p\}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

2. Poisson-Klammern. Eigenschaften:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right] \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\} \quad \{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}$$

$$\{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} + F_2 \{F_1, F_3\}$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$$

3. Falls eine Funktion $I(p, q)$ explizit zeitunabhängig ist und die Poisson-Klammer von $I(q, p)$ mit der Hamilton-Funktion Null ist, ist $I(p, q)$ ein Bewegungsintegral.

$$\left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \right|_Q = p,$$

$$-\left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \right|_q = P,$$

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

4. Kanonische Transformationen

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Eine wichtige Eigenschaft der kanonischen Transformationen ist, dass diese Transformationen die Poisson-Klammern invariant lassen. Wir werden diesen Satz für eindimensionale Systeme prüfen:

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

Wir fangen mit der Poisson-Klammer für eine Koordinate und einen Impuls an:

$$p = \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_q$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\{Q, P\}_{Q,P} = -1 \quad \{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \left. \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \right] - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad \rightarrow \quad - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} = 1 \quad 1 = \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = -1 = \{Q, P\}_{Q,P}$$

6. Hamiltonische Gleichungen

Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

$$F_{1,2} = F_{1,2}(Q, P, t)$$

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial P} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\}_{q,p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial P} \frac{\partial F_2}{\partial Q} - \frac{\partial F_1}{\partial Q} \frac{\partial F_2}{\partial P} = \{F_1, F_2\}_{Q,P}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{F_1, Q\} &= \frac{\partial F_1}{\partial P} \{P, Q\} = \frac{\partial F_1}{\partial P} \\ \{F_2, P\} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{Q, P\} = -\frac{\partial F_2}{\partial Q}\end{aligned}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Ein Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Wir führen neue Variablen ein
und wollen wissen ob diese
Variablen kanonisch sind.

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{m\omega}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{i}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}$$
$$\frac{\partial a^+}{\partial x} = \frac{m\omega}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial a^+}{\partial p} = \frac{-i}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}$$

$$\{a, a^+\} = \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial a^+}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a^+}{\partial p} = \frac{im\omega}{2m\omega} + \frac{i\omega\omega}{2m\omega} = i$$

$$\underline{a = Q, \quad ia^+ = P} \Rightarrow \{P, Q\} = \{ia^+, a\} = i\{a^+, a\} = 1.$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Wir finden dann die erzeugende Funktion

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

Per Definition gilt:

$$p = \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial x}, \quad P = -\frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial Q} \quad Q = a, \quad P = ia^+$$

Wir integrieren über x. Die "Integrationskonstante" ist eine Funktion von Q und t.

$$p = im\omega x - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Q = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad F(x, Q, t) = \frac{im\omega x^2}{2} - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Qx + \tilde{F}(Q, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} x + \frac{d\tilde{F}}{dQ} = -P \quad \longleftrightarrow \quad P = i\sqrt{2m\omega} x e^{-i\omega t} - iQ e^{-2i\omega t}$$

$$\frac{d\tilde{F}}{dQ} = iQ e^{-2i\omega t} \Rightarrow \tilde{F} = \frac{iQ^2}{2} e^{-2i\omega t}$$

$$F(x, Q) = \frac{im\omega}{2} x^2 + \frac{iQ^2}{2} e^{-2i\omega t} - iQx e^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega}$$

Wir berechnen dann die neue Hamilton-Funktion und bekommen eine Null. D.h. die neue Koordinate und der neue Impuls sind Konstanten.

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H + \omega Q^2 e^{-2i\omega t} - Qx\omega \sqrt{2m\omega} e^{-i\omega t}$$

$$\omega Q^2 e^{-2i\omega t} - Qx\omega \sqrt{2m\omega} e^{-i\omega t} = i\omega QP$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{(m\omega x + ip)(m\omega x - ip)}{2m} = \omega a a^+ = -i\omega QP$$

$$K = 0$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

In dem Moment wo wir die Zeitabhängigkeit von Q und P kennen, können wir $x(t)$ bestimmen.

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

$$K = 0 \Rightarrow Q(t) = Q_0, \quad P(t) = P_0 \qquad Q = a, \quad P = ia^+$$

$$x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (Q_0 e^{-i\omega t} - iP_0 e^{i\omega t}), \quad -iP_0 = Q_0^* \quad Q_0 = |Q_0| e^{i\phi_0}$$

$$x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} |Q_0| \cos(\omega t + \phi_0)$$

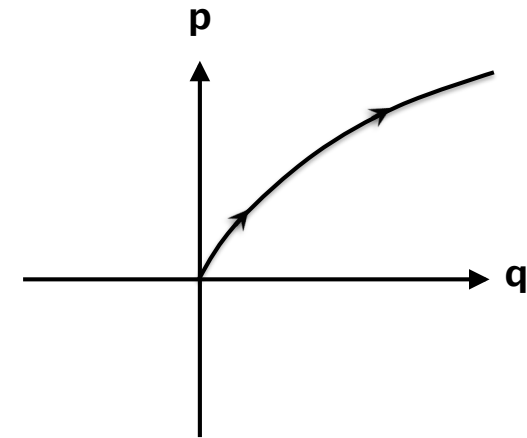
6. Hamiltonischen Gleichungen

Der Phasenraum: Der $2n$ -dimensionale Raum $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ in dem jeder Punkt einem möglichen Zustand des Systems entspricht, nennt man Phasenraum. Die Zeitentwicklung des Systems ist eine Kurve im Phasenraum.

Bewegung mit konstanter Beschleunigung: Zeitentwicklung entspricht einer Parabel im Phasenraum.

$$v = at, \quad p = m a t, \quad q = \frac{at^2}{2}$$

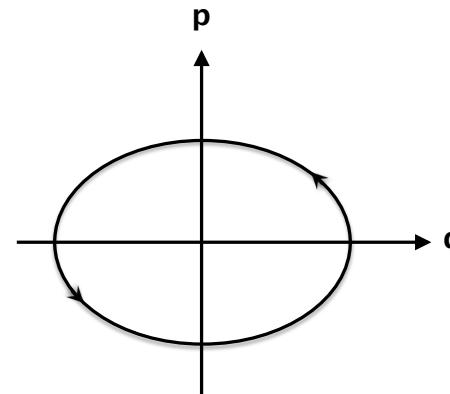
$$p(t) = \sqrt{2am^2 q(t)}$$



Harmonischer Oscillator : Zeitentwicklung entspricht einer Ellipse im Phasenraum.

$$q = A \cos(\omega t + \phi), \quad \dot{q} = -A\omega \sin(\omega t + \phi), \quad p = m\dot{q} = -Am\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{q(t)^2}{A^2} + \frac{p(t)^2}{A^2 m^2 \omega^2} = 1$$



6. Hamiltonsche Gleichungen

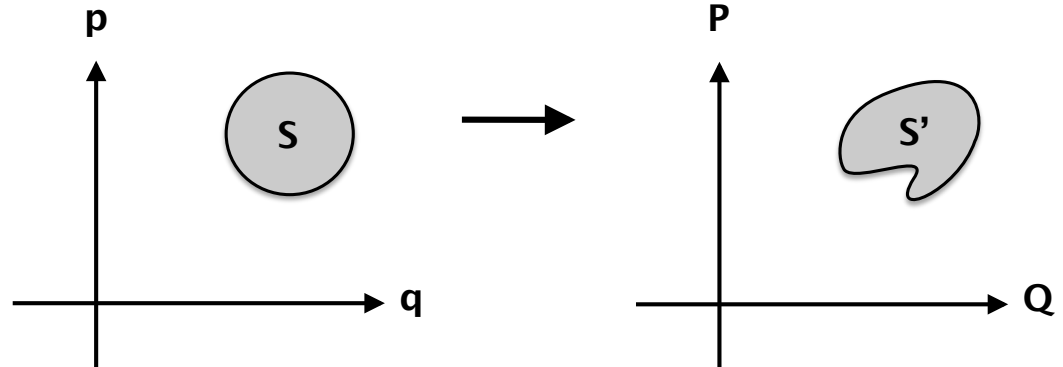
Volumen im Phasenraum sind invariant unter kanonischen Transformationen.

Wir beweisen diese Behauptung für den eindimensionalen Fall.

$$V = \int_S dp \, dq \quad (p, q) \rightarrow (P, Q)$$

$$S \rightarrow S'$$

$$\int_{S'} dP dQ = V'$$



$$\int_S dp \, dq = \int_{S'} J \, dP dQ \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} \quad J = \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{vmatrix}$$

$$J = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = \{p, q\}_{Q, P} = \{p, q\} = 1$$

$$V = \int_S dp dq = \int_{S'} dP dQ = V'$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Die Zeitentwicklung eines Systems können wir als kanonische Transformation betrachten.

Wir betrachten die Wirkung als Funktion von Koordinaten, die ein Teilchen in gegebener Zeit erreicht. In diesem Fall, ist die Wirkung entlang einer physikalischen Trajektorie berechnet.

$$S = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial q(t)} \Big|_t = p(t)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} [\delta q] \right) \\ &= \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \right) \\ &= p \delta q \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \right) = p \delta q(t) \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dt} = L \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q(t)} \dot{q}(t) = \frac{\partial S}{\partial t} + p(t) \dot{q}(t) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = L - p\dot{q} = H(t)$$

$$dS = p dq - H dt$$

$$dS = p_{t_2} dq_{t_2} - p_{t_1} dq_{t_1} - H_{t_2} dt_2 + H_{t_1} dt_1$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Zeitentwicklungen als kanonische Transformation:

$$dS = p_{t_2} dq_{t_2} - p_{t_1} dq_{t_1} - H_{t_2} dt_2 + H_{t_1} dt_1$$

$$\{p(t), q(t)\} \Rightarrow \{p(t + \tau), q(t + \tau)\}$$

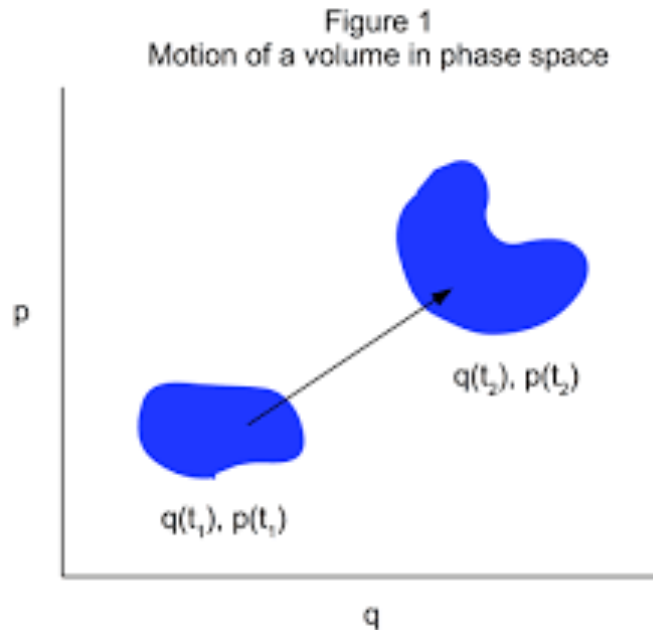
$$dS = p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t - (H_{t+\tau} - H_t) dt$$

$$p_{t+\tau} = \frac{\partial S}{\partial q_{t+\tau}}, \quad p_t = -\frac{\partial S}{\partial q_t}, \quad H_t - H_{t+\tau} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

Es folgt das -S (minus Wirkung) die erzeugende Funktion ist.

6. Hamiltonischen Gleichungen

Der Satz von Liouville



$$V = \int_S dp dq$$

$$V(t_2) = V(t_1)$$

Der Satz von Liouville Satz erfolgt aus:

- 1) V ist invariant unter kanonischen Transformationen
- 2) Die Zeitentwicklung eines Systems ist eine kanonische Transformation

Der Satz von Liouville gilt auch für mechanische Systeme mit vielen Freiheitsgraden wo das Phasenraumvolumen so definiert ist

$$V = \int dp_1 dp_2 \dots dp_n \dots dq_1 \dots dq_n$$