

Zusammenfassung

1. Hamiltonsche Mechanik und die hamiltonschen Gleichungen; Poisson-Klammern, Kanonische Transformationen

$$H(\{q\}, \{p\}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right] \quad \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \Big|_Q = p,$$

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \Big|_q = P,$$

2. Poisson-Klammern sind invariant unter kanonische Transformationen $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

3. Der Phasenraum: Der 2n-dimensionale Raum $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ in dem jeder Punkt einem mögliche Zustand des Systems entspricht, nennt man Phasenraum. Die Zeitentwicklung des Systems ist eine Kurve im Phasenraum.

4. Das Phasenraumvolumen ist invariant unter kanonische Transformationen

5. Die Zeitentwicklung von Koordinaten und Impulse kann man als kanonische Transformation betrachten.

6. Der Satz von Liouville: das Volumen eines Gebiets des Phasenraums ist zeitunabhängig.

7. Starre Körper

Unter “starren Körpern” versteht man ein mechanisches System vieler Teilchen deren Abstände unveränderlich sind.

Um starre Körper beschreiben zu können ist es nützlich zwei Koordinatensysteme einzuführen: **Erstens ein Laborsystem (L-system) mit fixierte Achsen und zweitens ein Koordinatensystem das mit dem Körper starr verbunden ist (K-system).**

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{r} \quad \text{Drehung um } O: |\vec{r}| = \text{const!} \quad \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$$

Die Drehung um die Achse $\vec{n}$ um den Winkel $d\varphi$ bezeichnen wir als $d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{n}$. Die allgemeine Formel für $d\vec{r}$ ist dann $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$

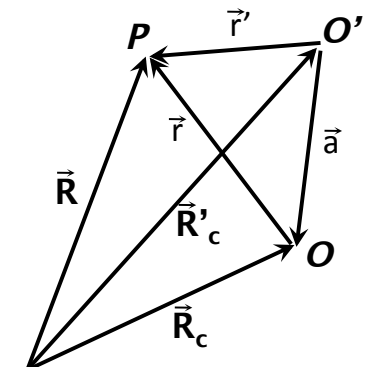
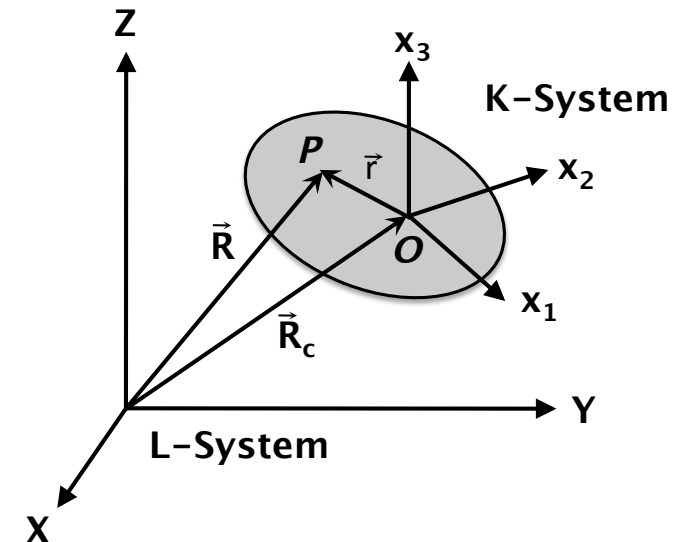
Die Geschwindigkeit eines starren Körpers hat zwei Komponenten: Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und die Geschwindigkeit “der Drehung” um den Schwerpunkt.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \vec{V}_c + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad \text{Winkelgeschwindigkeit des Körpers im K-system}$$

Falls wir ein anderes Koordinatensystem (K') mit dem starren Körper assoziieren bekommen wir

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times (\vec{r}' - \vec{a}) \\ &\equiv \vec{V}' + \vec{\Omega}' \times \vec{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}'_c &= \vec{V}_c - \vec{\Omega} \times \vec{a} \\ \vec{\Omega}' &= \vec{\Omega} \end{aligned}$$



7. Starre Körper

Die kinetische Energie des starren Körpers berechnen wir, indem wir den Körper als eine Menge von Teilchen betrachten. Die Kinetische Energie ist die Summe von kinetischen Energien der Teilchen; die Geschwindigkeit schreiben wir zuerst in L-System. Der Nullpunkt des K-Systems liegt im Schwerpunkt des Körpers.

$$(\vec{R}_i = \vec{R}_c + \vec{r}_i)$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i = M \vec{R}_c,$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{V}_i^2}{2} \quad \vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$$

Drei beiträge zur
kinetischen Energie

$$\vec{V}_i^2 = \vec{V}_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{M \vec{V}_c^2}{2} + \frac{I_{\alpha\beta} \vec{\Omega}_\alpha \vec{\Omega}_\beta}{2}$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{V}_c^2}{2} = \frac{M \vec{V}_c^2}{2}$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^N m_i 2 \vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] = 2\vec{V}_c \cdot \left[\vec{\Omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right] = 0$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2}{2} \quad [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2 = \vec{\Omega}^2 \vec{r}_i^2 \sin^2 \theta_i = \vec{\Omega}_i^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\Omega}_i \cdot \vec{r}_i)^2 = \vec{\Omega}_\alpha \vec{\Omega}_\beta (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta})$$

$$T_3 = \frac{I_{\alpha\beta} \vec{\Omega}_\alpha \vec{\Omega}_\beta}{2}$$

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta})$$

Trägheitstensor des
starres Körpers

7. Starre Körper

Bemerkungen zum Trägheitstensor:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta})$$

1) Der Trägheitstensor ist symmetrisch

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$$

2) Falls der Körper durch kontinuierliche Massendichte charakterisiert ist, berechnen wir den Trägheitstensor als ein Integral

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta) \quad M = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

3) Eine Matrix (einen Tensor) kann man diagonalisieren indem man geeignete Achsen im K-System wählt. Diese Achsen nennt man die “Hauptträgheitsachsen”. Die Eigenwerte des Trägheitstensors I_1, I_2, I_3 nennt man die Hauptträgheitsmomente.

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

4) Ein Körper mit unterschiedlichen I_1, I_2, I_3 nennt man “**asymmetrischer Kreisel**”. Ein Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomente nennt man einen “**symmetrischer Kreisel**”. Ein Körper mit gleichen I_1, I_2, I_3 ist ein “**Kugelkreisel**”.

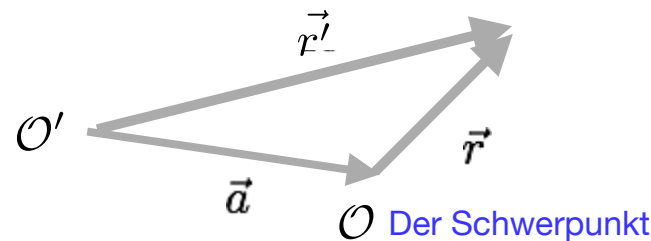
7. Starre Körper

Bemerkungen zum Trägheitstensor:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta})$$

5) Die gegebene Formeln für den Trägheitstensor entspricht den Situation in den der Nullpunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt des Körpers liegt. Was passiert falls wir das Koordinatensystem anders wählen?

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$$



$$\underline{I'_{\alpha\beta}} = \sum_i m_i (\vec{r}'_i^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}'_{i,\alpha} \vec{r}'_{i,\beta}) = \sum_i m_i ((\vec{r}_i + \vec{a})^2 \delta_{\alpha\beta} - (\vec{r}_i + \vec{a})_\alpha (\vec{r}_i + \vec{a})_\beta)$$

$$= \underline{I_{\alpha\beta} + M(\vec{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{a}_\alpha \vec{a}_\beta)}$$

Alle Terme linear in “r” fallen wegen der Definition des Schwerpunkts weg:

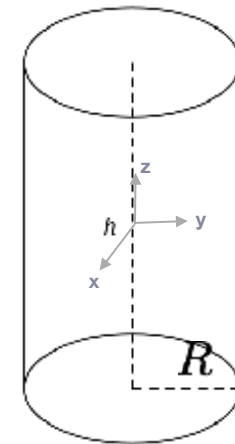
$$\sum m_i \vec{r}_{i,\alpha} = 0$$

7. Starre Körper

Ein Beispiel: Der Trägheitstensor eines Zylinders mit homogener Massendichte.

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$$

Es lohnt sich das K-System so zu wählen, dass wir die Symmetrien des Körpers berücksichtigen. Der Nullpunkt des K-Systems ist im Schwerpunkt.



$$\rho(\vec{r}) = \mu, \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

$$I_{\alpha\beta} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{x^2+y^2 < R^2} dx dy (\delta_{\alpha\beta}(x^2 + y^2 + z^2) - r_\alpha r_\beta)$$

Zylindrische Koordinaten um die Integration zu vereinfachen.

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z), \quad dx dy = \rho d\rho d\phi$$

Alle nicht diagonalen Beiträge zum Trägheitstensor sind Null.

$$I_{xy} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi [-\rho^2 \cos \phi \sin \phi] = 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \sin \phi = 0$$

$$I_{xz} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi [-z \rho \cos \phi] = 0$$

$$I_{yz} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi [-z \rho \sin \phi] = 0$$

7. Starre Körper

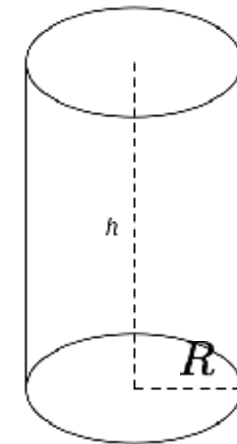
Ein Beispiel: Der Trägheitstensor eines Zylinders mit homogener Massendichte

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$$

Es lohnt sich das K-System so zu wählen, dass wir die Symmetrien des Körpers berücksichtigen. Der Nullpunkt des K-Systems ist im Schwerpunkt.

$$I_{\alpha\beta} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{x^2+y^2 < R^2} dx dy (\delta_{\alpha\beta} (x^2 + y^2 + z^2) - r_\alpha r_\beta)$$

Diagonale Beiträge:



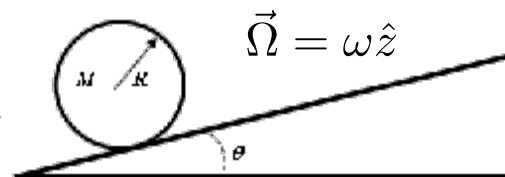
Masse des Zylinders

$$M = \mu \pi R^2 h$$

$$I_{zz} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (\rho^2 + z^2 - z^2) = \frac{2\pi\mu h R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{xx} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (z^2 + \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi) \quad \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$



$$T = \frac{1}{2} I_{zz} \Omega_z^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega^2$$