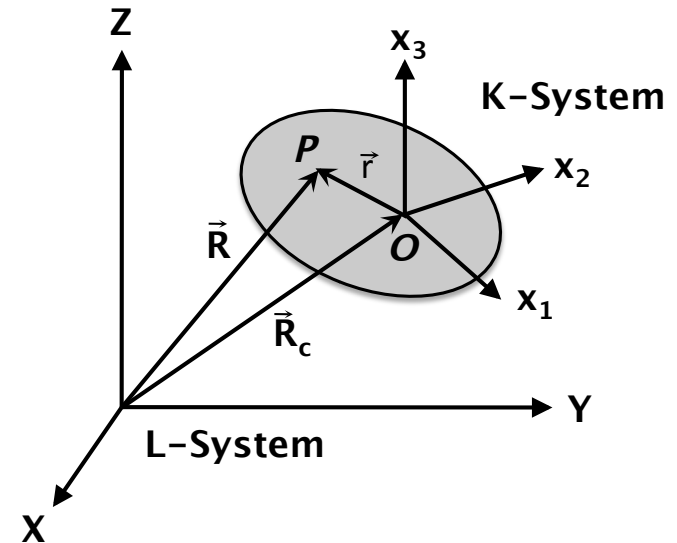


Zusammenfassung

1. Starre Körper: Zwei Koordinatensysteme (L und K). Die Bewegung im K-System ist eine Rotation.

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \vec{V}_c + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$



2. Die kinetische Energie des Körpers und der Trägheitstensor

$$T = \frac{M\vec{V}_c^2}{2} + \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}$$

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta})$$

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$$

3. Kugel ($I_1=I_2=I_3$), symmetrische Kreisel ($I_1=I_2$) u.s.w.

7. Starre Körper

Der Drehimpuls des starren Körpers: Wir schreiben die Impulse der Teilchen im Ruhesystem des Schwerpunktes.

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$$

$(\vec{V}_c = \vec{0})$ ←

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]]$$

$$[\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]] = \vec{\Omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i)$$

Der Drehimpuls des Starres Körpers ist ein Matrixprodukt von Trägheitstensor und Winkelgeschwindigkeitvektor (Ruhesystem des Schwerpunktes)

$$\vec{M}_\alpha = \Omega_\beta \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta}) = I_{\alpha\beta} \Omega_\beta, \quad \vec{M} = \hat{I} \vec{\Omega}$$

Wie bewegt sich ein freier starren Körper? Der Drehimpuls ist erhalten; der Schwerpunkt ist in Ruhe....

Kugelkreisel: In diesem Fall sind der Drehimpuls und die Winkelgeschwindigkeit proportional. D.h. der Kreisel dreht sich mit der Geschwindigkeit Ω um die $\vec{M}$ Achse

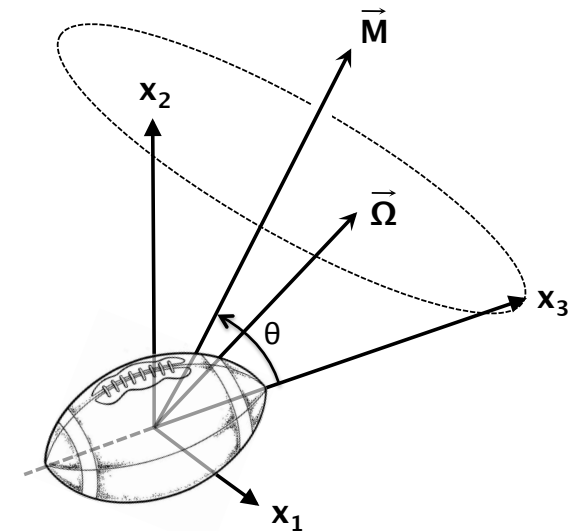
$$\vec{M} = I \vec{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{M}{I}$$

7. Starre Körper

Symmetrischer Kreisel: Wir wählen das K-System so, dass der Trägheitstensor diagonal ist.

$$\vec{M} = \hat{I} \vec{\Omega} \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Außerdem wählen wir das K-System so, dass momentan x_2 in der M - x_3 Ebene liegt und x_1 senkrecht auf dieser Ebene steht. In diesem Fall ist M_1 gleich Null. Das bedeutet, dass $\Omega_1 = 0$ und damit, dass der Winkel θ sich nicht ändert. Die Bewegung ist eine Präzession um $\vec{M}$.



$$I_3 \Omega_3 = M \cos \theta \Rightarrow \Omega_3 = \frac{M \cos \theta}{I_3} \quad I \Omega_2 = M \sin \theta \Rightarrow \Omega_2 = \frac{M \sin \theta}{I}$$

Drehung um $\vec{e}_3$ erzeugt keine Präzession

Präzession um $\vec{M}$ $\vec{\Omega} = \Omega_M \vec{e}_M + \Omega_3 \vec{e}_3$ $\vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{|\vec{M}|}$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{\Omega} = \Omega_M \vec{e}_M \cdot \vec{e}_2.$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{\Omega} = \Omega_2 = \frac{M \sin \theta}{I}, \quad \vec{e}_M \cdot \vec{e}_2 = \sin \theta$$

$$\Omega_M = \frac{M}{I}$$

Winkelgeschwindigkeit der Präzession

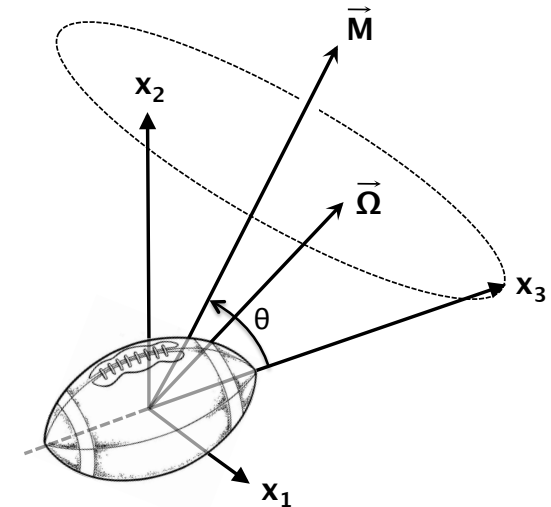
7. Starre Körper

Die Euler-Gleichungen: Wir betrachten einen freien Kreisel. Der Drehimpuls ist erhalten. Wir schreiben den Drehimpuls im K-System:

$$\vec{M} = M_j \vec{e}_j \quad \frac{d}{dt} \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{dM_j}{dt} \vec{e}_j + M_j \frac{d}{dt} \vec{e}_j = 0.$$

Das K-System dreht sich; das bedeutet

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_j = [\vec{\Omega} \times \vec{e}_j] \quad \vec{\Omega} = \Omega_l \vec{e}_l \quad \vec{e}_j \cdot [\vec{e}_l \times \vec{e}_k] = \epsilon_{jlk}$$



$$\frac{dM_j}{dt} = -M_k \left(\vec{e}_j \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_k \right) = -\epsilon_{jlk} \Omega_l M_k$$

Wir wählen die Hauptträgheitsachsen als Achsen des Koordinatensystems sodass $M_k = I_k \Omega_k$ (keine Summe !) ist. Dann bekommen wir drei Gleichungen (**Euler Gleichungen**)

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \quad \frac{d\Omega_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2$$

Im Fall eines symmetrischen Kreisels ($I_1 = I_2 = I$) können wir diese Gleichungen lösen und wir erhalten

$$\Omega_3 = \text{const} \quad \Omega_1 = \Omega_0 \cos(\omega t + \phi), \quad \Omega_2 = \Omega_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \omega = \frac{|I - I_3|}{I} \Omega_3$$

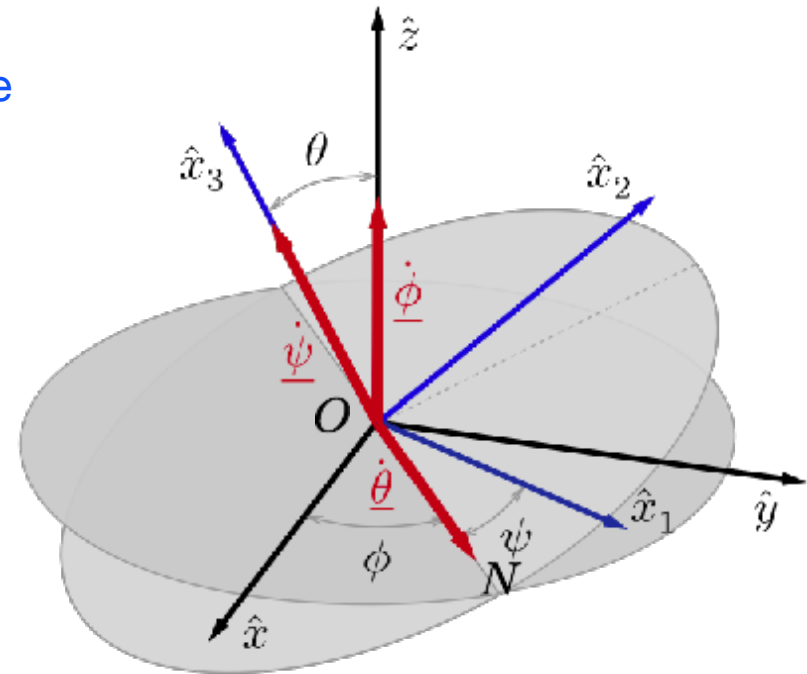
7. Starre Körper

Die **eulerschen Winkel**: eine nützliche Parametrisierung des K-Systems erhält man durch die sogenannten eulerschen Winkel. Die Achsen des L-Systems bezeichnen wir als (X,Y,Z); die Achsen des K-Systems als (x1,x2,x3). Die Nullpunkte der zwei Systeme fallen zusammen.

Die (x1,x2)-Ebene schneidet die (X,Y)-Ebene entlang der "Knoten Linie" ON'. Die Richtung der ON-Achse ist durch $\vec{e}_N = [\vec{e}_Z \times \vec{e}_3]$ gegeben.

Wir können die Lage des K-Systems vollständig beschreiben indem wir drei Winkel definieren:

Winkel	ϕ	zwischen ON und X
Winkel	ψ	zwischen ON und x1
Winkel	θ	zwischen Z und x3



7. Starre Körper

Um das K-System in die richtige Position zu rotieren, führen wir mehrere Rotationen, in bestimmter Reihenfolge, um verschiedene Achsen hintereinander aus.

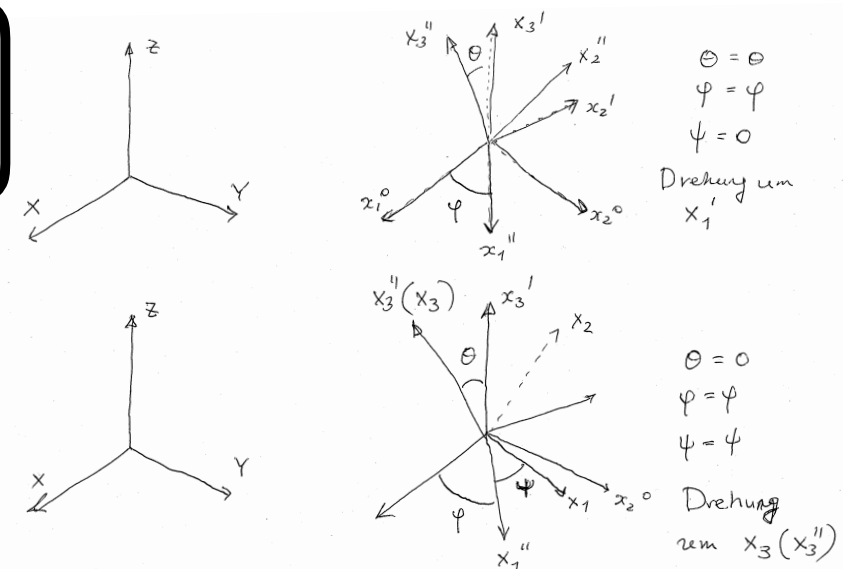
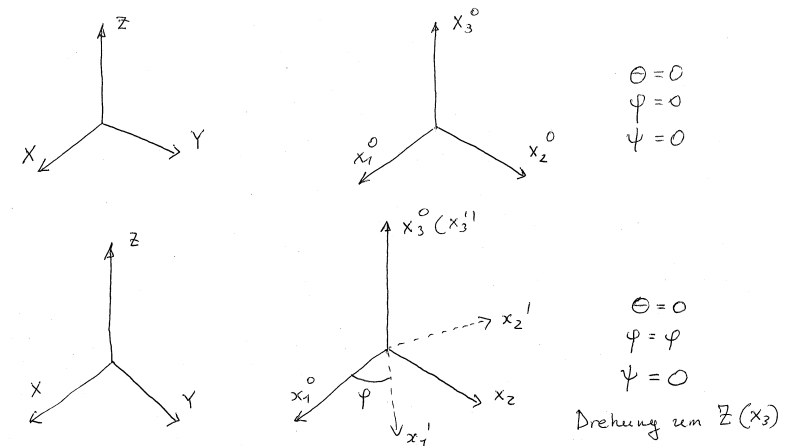
$$\vec{r}' = \hat{R}_\phi \vec{r} \quad \hat{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für einen gegebenen Vektor $\vec{r}$ im L-System, geben die obigen Formeln die Komponenten von $\vec{r}$ im rotierten (x_1', x_2', x_3') -System an.

Wir können jetzt genau das gleiche für weitere Rotationen machen. Wir bekommen dann

$$\vec{r}_K = \hat{R}_\psi \cdot \hat{R}_\theta \cdot \hat{R}_\phi \vec{r}_L$$

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{R}_\psi = \hat{R}_\phi |_{\phi \rightarrow \psi}$$



7. Starre Körper

$$\vec{r}_K = \hat{R}_\psi \cdot \hat{R}_\theta \cdot \hat{R}_\phi \vec{r}_L = D(\psi, \theta, \phi) \vec{r}_L$$

$$\hat{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{R}_\psi = \hat{R}_\phi|_{\phi \rightarrow \psi}$$

Ein Beispiel: $(\vec{e}_Z)_L = (0, 0, 1)^T$

$$(\vec{e}_Z)_K = D(\psi, \theta, \phi)(\vec{e}_Z)_L$$

$$(\vec{e}_Z)_K = (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)^T$$

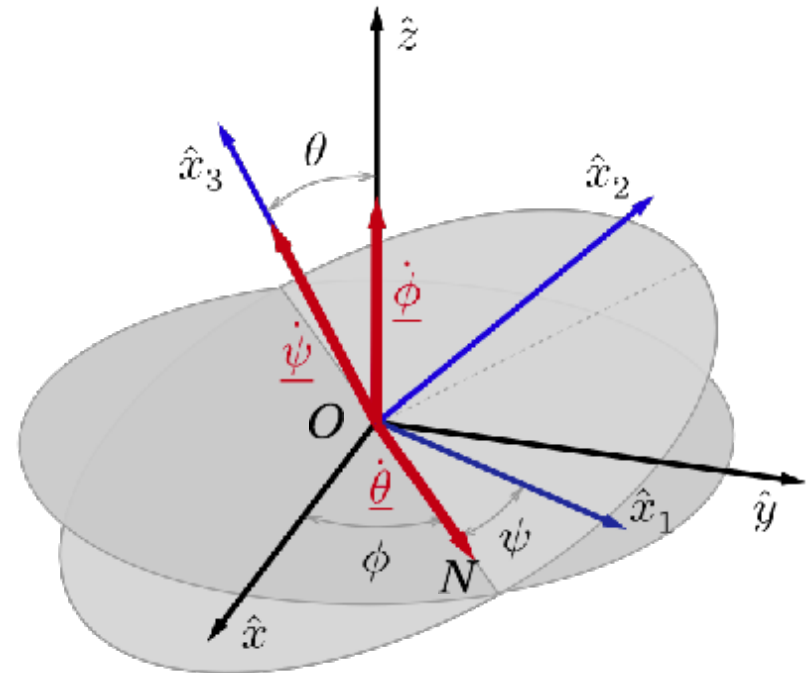
Damit ist die Z-Achse im K-System gegeben durch

$$(\vec{e}_Z)_K = \sin \theta \sin \psi \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$

Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{e}_Z + \dot{\theta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3$

Wir benutzen die obigen Formeln, um die Winkelgeschwindigkeit im K-System auszudrücken

$$\vec{\Omega} = \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \right) \vec{e}_1 + \left(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \right) \vec{e}_2 + \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right) \vec{e}_3$$



7. Starre Körper

Falls wir die Achsen des K-systems als Hauptträgheitsachsen wählen, können wir die kinetische Energie sehr einfach schreiben

$$\vec{\Omega} = \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \right) \vec{e}_1 + \left(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \right) \vec{e}_2 + \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right) \vec{e}_3$$

$$T = \frac{I_1 \Omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \Omega_2^2}{2} + \frac{I_3 \Omega_3^2}{2} \quad \Omega_i = \vec{e}_i \cdot \vec{\Omega}$$

Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel ($I_1 = I_2 = I$). Es gilt:

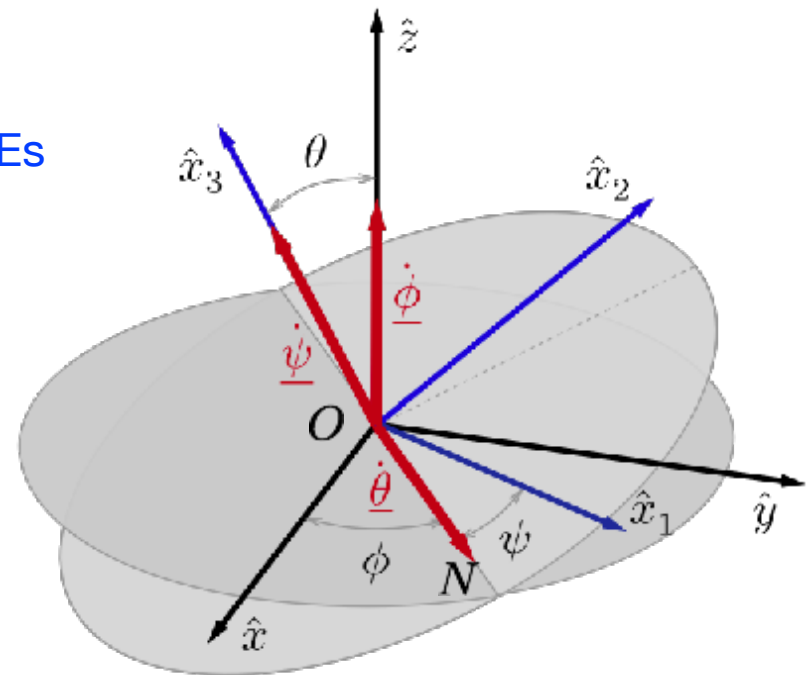
$$L = T = \frac{I}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2$$

Die zwei Winkel, ψ und ϕ sind zyklische Variablen; d.h. die entsprechenden Impulse sind erhalten.

$$p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$$

$$p_\phi = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + p_\psi \cos \theta$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}$$



7. Starre Körper

Für freie Körper ist der Drehimpuls erhalten. Es ist geschickt $\vec{M}$ entlang die Z-Achse zu wählen. Dann:

$$\vec{M} = M(\vec{e}_Z)_K \quad (\vec{e}_Z)_K = \sin \theta \sin \psi \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$

$$\vec{M} = I\Omega_1 \vec{e}_1 + I\Omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \Omega_3 \vec{e}_3$$

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

Es folgt

$$I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 p_\psi = M \cos \theta \Rightarrow \theta = \text{const}$$

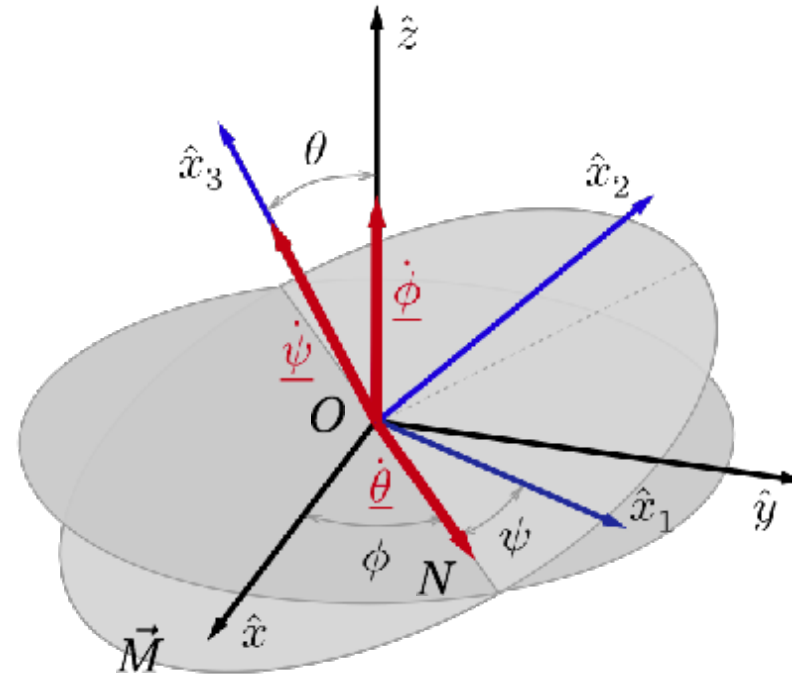
$$I\dot{\phi} = M \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{M}{I}$$

Präzessionsgeschwindigkeit

Zwei Bewegungsintegrale können wir durch Drehimpuls und den Winkel θ ausdrücken

$$p_\psi = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{M \cos \theta}{I_3}$$

$$p_\phi = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 p_\psi \cos \theta = M$$



Die Klausur

1. Die Klausur findet am 1. August von 14 bis 16 Uhr statt (sehen Sie bitte der Webseite um zu bestimmen wo genau Sie kommen sollen). Bitte kommen Sie 15 Minuten vor.

2. Eine Vorbesprechung findet am Montag, den 30. Juli, statt (NTI Hörsaal, 15.45-17.15 Uhr). Falls es zwei Tage vor der Klausur noch Fragen gibt, können diese gerne während dieser Veranstaltung besprochen werden.

3. Es ist erlaubt, ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt mitzubringen.

4. Es wird erwartet, dass Sie die wichtigsten Konzepte der Mechanik verstanden haben. Beispielweise, sollen Sie in der Lage sein

die Lagrangefunktion für ein mechanisches System zu bestimmen, Euler-Lagrange Gleichungen herzuleiten und zu analysieren;

Symmetrien der Lagrangfunktion zu erkennen und entsprechende Bewegungsintegrale zu nennen und zu benutzen;

Bewegungen im Zentralfeld zu beschreiben und zu argumentieren wie man von dreidimensionalen zu eindimensionalen Problem kommt;

Wirkungsquerschnitte zu berechnen;

kleine Schwingungen, inklusive Systeme mit viele Freiheitsgraden (Eigenfrequenzen, Normalkoordinaten), zu beschreiben;

Hamilton-Funktion für ein mechanisches System zu bestimmen, Hamiltonsche Gleichungen herzuleiten und zu lösen;

Poisson-Klammern zu berechnen und die kanonische Transformationen durchzuführen;

den Trägheitstensor zu berechnen und die kinetische Energie eines starren Körpers aufzuschreiben.

5. Falls Sie die Vorlesungen und die Übungsblätter sorgfältig bearbeitet haben, werden Sie keine Überraschungen während der Klausur erleben.