

Zusammenfassung

1. Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Falls die Wirkung eines mechanischen Systems unter der folgenden infinitesimalen Transformationen invariant ist

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \quad \epsilon \ll 1$$

ist die Grösse
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$
 ein Bewegungsintegral.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t'). \quad +\mathcal{O}(\epsilon^2)$$

2. Die Energieerhaltung. Homogenität der Zeit. Symmetrietransformation: Zeitverschiebung.

3. Die Impulserhaltung. Homogenität des Raumes. Symmetrietransformation: Koordinatenverschiebung.

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie. Symmetrietransformation: Drehungen.

2. Erhaltungssätze

Beispiele

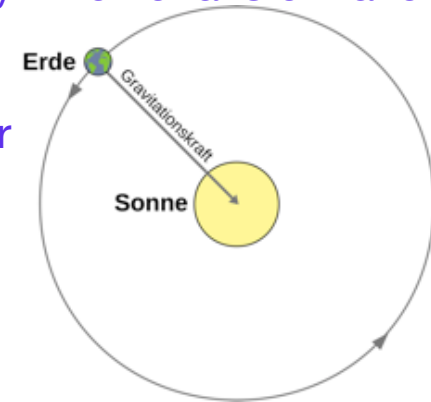
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie. Symmetrietransformation : Drehungen.

Die Erde im Gravitationsfeld der Sonne. Die potentielle Energie der Erde ist unabhängig von der Richtung des Ortsvektors und hängt nur von der Länge des Ortsvektors ab



$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \frac{\vec{r}}{r} + r\dot{\theta}(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) + r\dot{\phi} \sin \theta(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{r, \theta, \phi\}$$

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

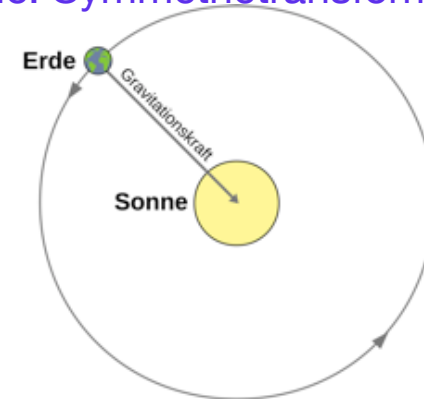
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie. Symmetrietransformation: Drehungen.

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \epsilon, \quad L(r, \theta, \phi) = L(r, \theta, \phi')$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$



Die Verschiebung des Azimutalwinkels entspricht einer Drehung um die z-Achse

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \rightarrow \vec{r}' = r(\sin \theta \cos(\phi + \epsilon), \sin \theta \sin(\phi + \epsilon), \cos \theta)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{r}, \quad \delta \vec{r} = \delta \phi [\vec{e}_z \times \vec{r}]$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

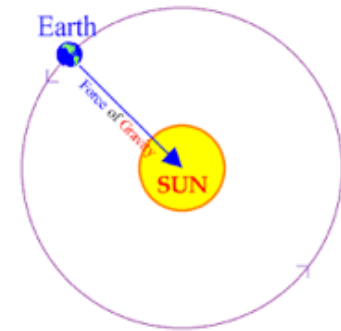
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$



Aber, wir können auch um eine **beliebige** Achse $\vec{n}$ drehen !

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad \delta\vec{r} = \delta\phi [\vec{e}_z \times \vec{r}] \rightarrow \delta\vec{r} = \delta\phi [\vec{n} \times \vec{r}]$$

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, \quad \delta\dot{\vec{r}} = \delta\phi [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}] \quad \vec{r}^2 \rightarrow \vec{r}'^2, \quad \dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}}', \quad L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = L(\dot{\vec{r}}', \vec{r}', t)$$

$$\epsilon \Psi_i = \delta \vec{r}_i = \delta\phi [\vec{n} \times \vec{r}]_i = \delta\phi \epsilon_{ijk} n_j r_k \Rightarrow \Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k$$

$$I_n = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \Psi_i = \sum_i m \dot{r}_i \epsilon_{ijk} n_j r_k = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

Weil der Vektor $\vec{n}$ beliebig ist, **bleibt der Drehimpulsvektor** $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ erhalten.

2. Erhaltungssätze

Beispiele: 5. Die Ähnlichkeitstransformation und das Virialtheorem

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^{(2-n)/2} t$$

$$L' = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^2 - U(\vec{r}') = \lambda^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - U(\vec{r}) \right] = \lambda^n L \quad S' = \lambda^{(2+n)/2} S$$

$$0 = S' - \lambda^{(2+n)/2} S \quad \lambda = 1 + \epsilon \quad \vec{\Psi} = \vec{r}, \quad X = \frac{(2-n)}{2} t$$

$$0 = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \vec{\Psi} - EX \right] - \frac{(2+n)}{2} L \right\} = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} - E \frac{(2-n)}{2} t \right] - \frac{(2+n)}{2} L \right\}$$

Um diese Grösse zu interpretieren, ist es nützlich das Integral über einem unendlich grossen Zeitraum zu mitteln. Für finite Bewegungen verschwindet der erste Term.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} [m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}] = 0 \quad \frac{(2-n)}{2} E = -\frac{(2+n)}{2} \langle L \rangle, \quad \langle L \rangle = \langle T \rangle - \langle U \rangle, \quad E = \langle T \rangle + \langle U \rangle$$

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele: 5. Mehr zu Ähnlichkeitstransformationen

$$U(\lambda \vec{r}_1, \lambda \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \lambda^n U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \beta t$$

$$\mathcal{L}' = \sum_i^N \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}'_i}{dt'} \right)^2 - U(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_N) = \frac{\lambda^2}{\beta^2} \sum \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 - \lambda^n U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{\lambda^2}{\beta^2} = \lambda^n \quad \Rightarrow \quad \beta = \lambda^{1-n/2}$$

$$\mathcal{L}' = \lambda^n \mathcal{L}$$

Falls zwei Lagrangenfunktionen proportional zueinander sind, sind die zugehörigen Bewegungsgleichungen identisch.

D.h. falls $\vec{r}(t)$ die Lösung der Bewegungsgleichungen ist, ist $\frac{1}{\lambda} \vec{r}\left(\frac{t}{\beta}\right)$ auch die Lösung.

$$(L, T) \quad (L_1 = L/\lambda, T_1 = T/\beta) \quad \frac{L}{L_1} = \lambda, \quad \frac{T}{T_1} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T} = \left[\frac{L_1}{L} \right]^{1-n/2}$$

2. Erhaltungssätze

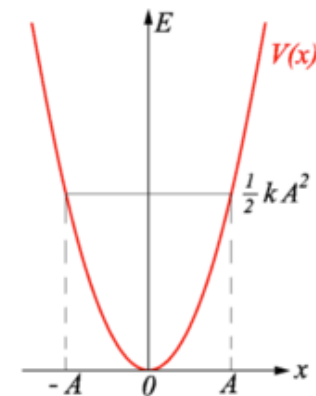
$$U(\lambda \vec{r}_1, \lambda \vec{r}_2, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^n U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \beta t$$

$$(L, T) \quad (L_1 = L/\lambda, T_1 = T/\beta)$$

$$\frac{L}{L_1} = \lambda, \quad \frac{T}{T_1} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T} = \left[\frac{L_1}{L} \right]^{1-n/2}$$

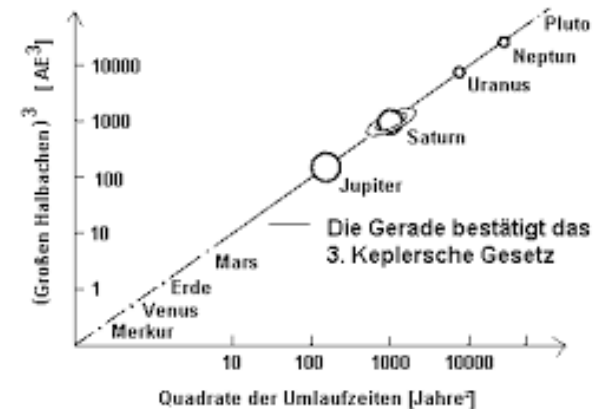
a) Harmonischer Oszillator: Die Periode der Schwingungen ist unabhängig von der Amplitude der Schwingungen.

$$U(\vec{r}) = \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 2 \quad \frac{T_1}{T} = 1$$



b) Die Grösse des Orbits und die Umlaufzeit (Keplersches drittes Gesetz)

$$U(\vec{r}) = \frac{GmM}{r} \quad \Rightarrow \quad n = -1 \quad \frac{T_1}{T} = \left[\frac{L_1}{L} \right]^{3/2}$$



3. Eindimensionale Bewegung

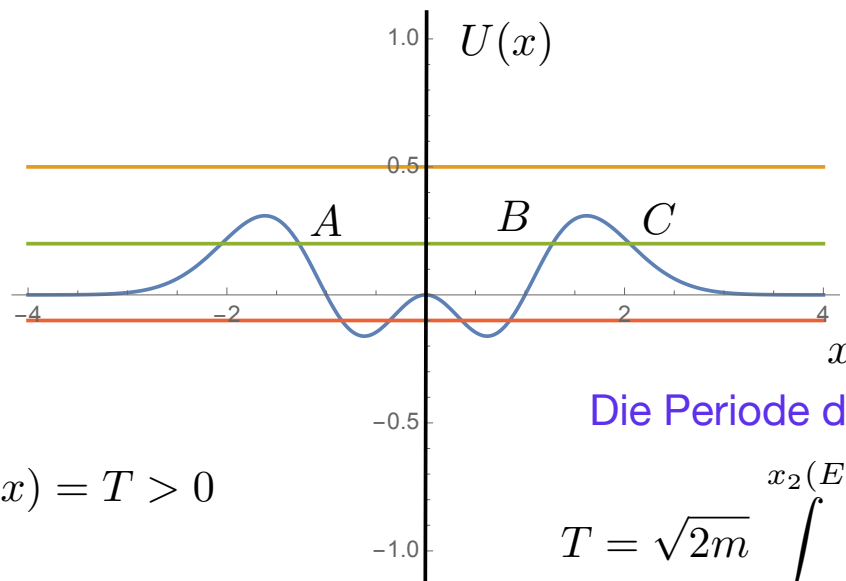
Im Fall einer eindimensionalen Bewegung kann man die Bewegungsgleichungen immer integrieren und die Zeitabhängigkeit der Bahn indirekt bestimmen, falls die Lagrangefunktion selbst zeitunabhängig ist.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = dt$$



Die Periode der Schwingungen

$$E - U(x) = T > 0$$

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0.$$

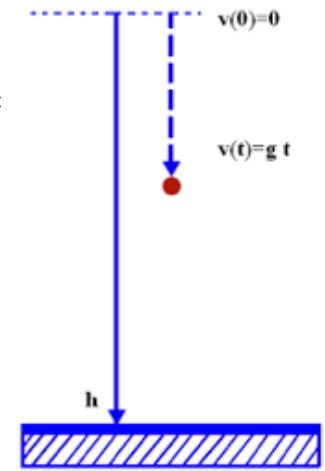
3. Eindimensionale Bewegung

Beispiel: Ein Teilchen im Gravitationsfeld; im Moment $t=0$ auf der Höhe h in Ruhe. Wir berechnen die Zeitabhängigkeit der Bahn $z(t)$.

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \quad E = mgh \quad \frac{dz}{dt} < 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_h^z \frac{d\xi}{\sqrt{E - mg\xi}}$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{E - mg\xi}} = -\frac{2}{mg} \sqrt{E - mg\xi} \quad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{mg} \sqrt{mgh - mg\xi} \Big|_h^z$$

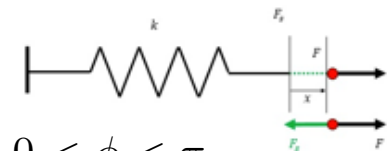
$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$



Beispiel: Ein Teilchen an einer Sprungfeder. Wir berechnen die Periodendauer der Schwingung.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad T = \sqrt{2m} \int_{x(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0.$$

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \phi, \quad 0 < \phi < \pi$$



$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\pi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

3. Eindimensionale Bewegung

Korrekturen zur Periodendauer der Schwingungen.

$$T = \sqrt{2m} \int_{x(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0. \quad U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

Naive Vorgehensweise: in $\delta U(x)$ entwickeln und Term für Term integrieren.

$$\frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{1}{\sqrt{E - U_0(x) - \delta U(x)}} \approx \frac{1}{\sqrt{E - U_0(x)}} + \frac{1}{2} \frac{\delta U(x)}{(E - U_0(x))^{3/2}} + \mathcal{O}(\delta U^2)$$

$$T_0 = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

$$\delta T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{(E - U_0(x))^{3/2}}$$

$$U_0(x_{1,2}) = E \Rightarrow U(x) \Big|_{x \approx x_{1,2}} \approx E + \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=x_{1,2}} (x - x_{1,2}) + \mathcal{O}((x - x_{1,2})^2)$$

$$\delta T \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx \delta U(x)}{(x - x_1)^{3/2}} \sim \frac{1}{(x - x_1)^{1/2}} \Big|_{x=x_1} = \infty!$$

Die Entwicklung eines Integrals in einem kleinen Parameter kann (generell) nicht durch die Entwicklung des Integranden in einem kleinen Parameter berechnet werden.

3. Eindimensionale Bewegung

Wir müssen zunächst das Integral glatter machen, insbesondere an den Grenzen. Die Umschreibung ist nur möglich weil die Geschwindigkeiten des Teilchens an den Integralgrenzen Null sind.

$$T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx \sqrt{E - U(x)} \quad \sqrt{E - U(x_{1,2})} = 0 \quad U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

Jetzt können wir in $\delta U(x)$ entwickeln:

$$\delta T = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

Wir können jetzt überprüfen ob der Integrand integrierbar ist. Verhalten an den Integralgrenzen:

$$\frac{1}{\sqrt{E - U_0(x)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_{1,2} - x}} \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} \sim \sqrt{x - x_1} \rightarrow 0.$$