

Zusammenfassung

1. Ähnlichkeitstransformationen

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

Das Virialtheorem: Relation zwischen zeitlich gemittelten kinetischer und potentieller Energie eines mechanischen Systems

$$\langle K \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle \qquad \langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t)$$

Die Ähnlichkeit der Bahnen: Relation zwischen räumlichen Abmessungen und Umlaufzeiten Zweier Bahnen eines mechanischen Systems

$$\frac{L_2}{L_1} = \lambda, \quad \frac{T_2}{T_1} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \beta = \lambda^{1-n/2} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{1-n/2}$$

2. Eindimensionale Bewegung

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \qquad E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{E - U(\xi)}} = t - t_0 \qquad T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \qquad E - U(x_{1,2}) = 0$$

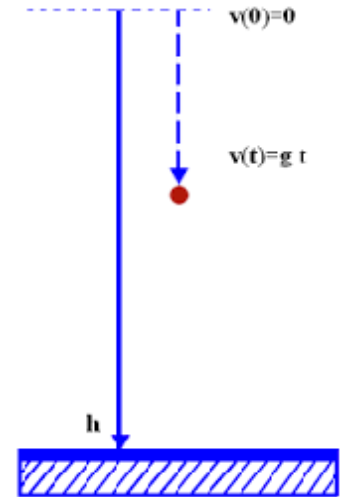
3. Eindimensionale Bewegung

Beispiel: Ein Teilchen im Gravitationsfeld; im Moment $t=0$ auf Höhe h in Ruhe. Wir berechnen die Zeitabhängigkeit der Bahn $z(t)$.

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \quad E = mgh \quad \frac{dz}{dt} < 0 \Rightarrow t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_h^z \frac{d\xi}{\sqrt{E - mg\xi}}$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{E - mg\xi}} = -\frac{2}{mg} \sqrt{E - mg\xi} \quad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{mg} \sqrt{mgh - mg\xi} \Big|_h^z$$

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

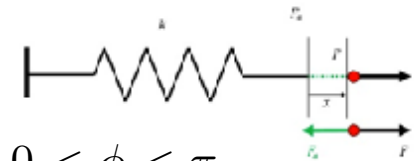


Beispiel: Ein Teilchen an einer Feder. Wir berechnen die Periodendauer der Schwingung.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \phi, \quad 0 < \phi < \pi$$



$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\pi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\pi d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3. Eindimensionale Bewegung

Korrekturen zur Periodendauer der Schwingungen: Störungstheorie

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0 \quad U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

$$\delta U(x) \ll U_0(x)$$

Naive Vorgehensweise: in $\delta U(x)$ entwickeln und Term für Term integrieren.

$$\frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{1}{\sqrt{E - U_0(x) - \delta U(x)}} \approx \frac{1}{\sqrt{E - U_0(x)}} + \frac{1}{2} \frac{\delta U(x)}{(E - U_0(x))^{3/2}} + \mathcal{O}(\delta U^2)$$

$$T_0 = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

$$U_0(x_{1,2}) = E \Rightarrow U(x) \Big|_{x \approx x_{1,2}} \approx E + \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=x_{1,2}} (x - x_{1,2}) + \mathcal{O}((x - x_{1,2})^2)$$

$$\delta T \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx \delta U(x_1)}{(x - x_1)^{3/2}} \sim \frac{1}{(x - x_1)^{1/2}} \Big|_{x=x_1} = \infty!$$

$$T \approx T_0$$

$$\delta T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{(E - U_0(x))^{3/2}}$$

Die Entwicklung eines Integrals in einem kleinen Parameter kann (generell) nicht durch die Entwicklung des Integranden in diesem kleinen Parameter berechnet werden.

3. Eindimensionale Bewegung

Wir müssen zunächst das Integral glatter (weniger singuläre) machen, insbesondere an den Grenzen. Die Umschreibung ist nur möglich weil die Geschwindigkeiten des Teilchens an den Integralgrenzen Null sind.

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \rightarrow T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx \sqrt{E - U(x)}$$

$$\sqrt{E - U(x_{1,2})} = 0$$

Jetzt können wir in $\delta U(x)$ entwickeln:

$$U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

$$\delta T = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

Wir können jetzt überprüfen ob der Integrand integrierbar ist. Dazu müssen wir das Verhalten an den Integralgrenzen zu überprüfen.

$$\frac{1}{\sqrt{E - U_0(x)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_{1,2} - x}}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} \sim \sqrt{x - x_1} \rightarrow 0.$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Integration der Bewegungsgleichungen in mehr als einer Dimension ist nicht immer möglich. Es gibt aber sehr wichtige Fälle wo es möglich ist.

Zwei-Körper-Problem. Der Schwerpunkstimpuls ist erhalten.

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

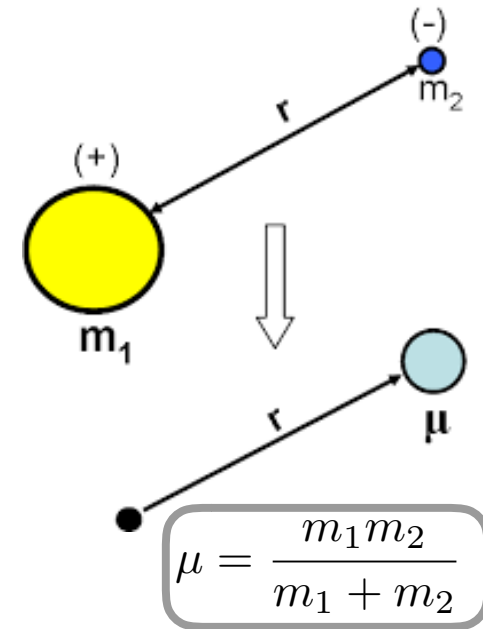
$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} = \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + 2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{m_2}{m_2 + m_1} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2^2)} \dot{\vec{r}}^2 \right)$$

$$+ \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 - 2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{m_1}{m_2 + m_1} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2^2)} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{(m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2}$$

$$L = \frac{m_{\text{tot}} \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}) \quad \frac{d}{dt} \dot{\vec{R}} = 0, \quad \mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$



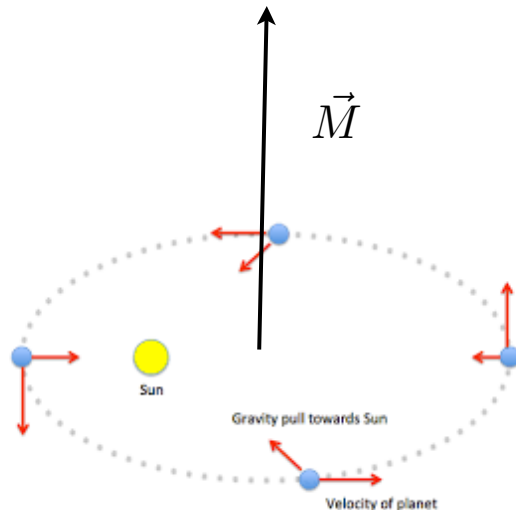
Die reduzierte Masse μ

3. Dreidimensionale Bewegung

Bewegung im Zentralfeld kann zum eindimensionalen Fall reduziert werden.

Der Drehimpuls ist erhalten. Bewegung passiert in der Ebene welche orthogonal zum Drehimpulsvektor ist.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r)$$



$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{r} \cdot \vec{M} = 0, \quad \dot{\vec{r}} \cdot \vec{M} = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{M} = 0$$

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - U(r)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - U(r)$$

Zwei Bewegungsintegrale: Die Energie und der Drehimpuls. Wir kombinieren beide um die effektive potentielle Energie des Teilchens zu konstruieren.

$$M = mr^2 \dot{\phi}$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$t - t_0 = \pm \int_r^r \frac{d\bar{r}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}}$$

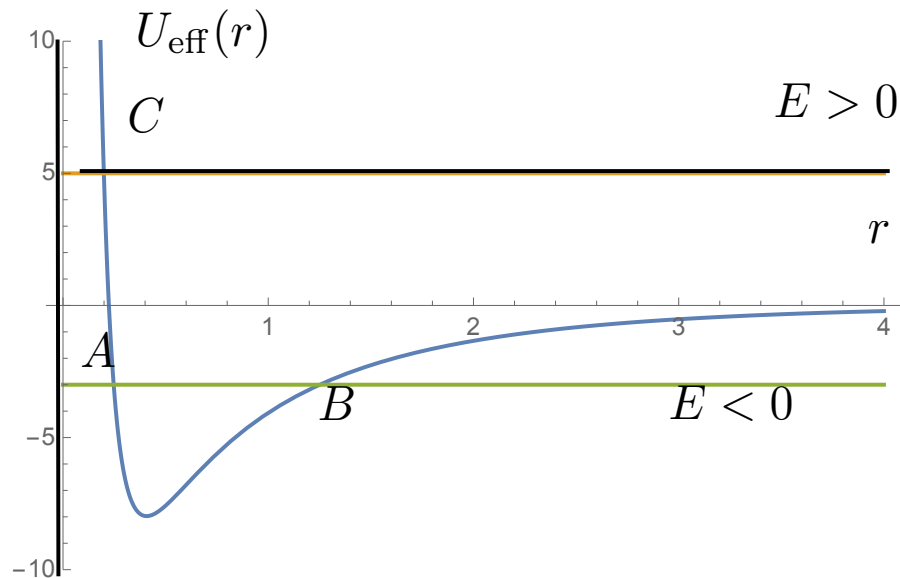
3. Dreidimensionale Bewegung

Die Radialbewegung kann man wie eine eindimensionale Bewegung betrachten.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$t - t_0 = \pm \int^r \frac{d\bar{r}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}} \quad M = mr^2 \dot{\phi}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} U(r) \sim -\alpha r^{-n}$$



Falls $n > 2$ ist, kann das Teilchen auf das Zentrum fallen.

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{mr^2}$$

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}}{M/(mr^2)}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Es gibt verschiedene Trajektorien denen ein Teilchen in einem Zentralfeld folgen kann.

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}}{M/(mr^2)}$$

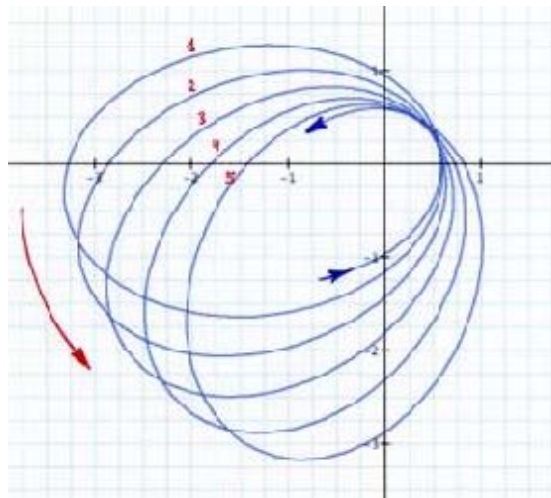
$$\Delta\phi = 2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr \frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

$$\phi - \phi_0 = \int^r \frac{dr \frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

Die Trajektorie ist geschlossen falls

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{n_1}{n_2}, \quad n_{1,2} \text{ sind ganze Zahlen}$$

Die Trajektorien sind geschlossen nur für die Potentiale $U(r)=-1/r$ oder $U(r)=r^2$.



3. Drei-dimensionale Bewegung

Das Kepler Problem

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \qquad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}$$

Die Kopplungskonstante α kann entweder positiv (anziehende Kraft) oder negativ (abstossende Kraft) sein.

Betrachten wir die positive Kopplungskonstante.

$$\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{M^2}{2mr_0} + \frac{\alpha}{r_0^2} = 0, \quad r_0 = \frac{M^2}{m\alpha} \qquad U_{\text{eff}}^{\text{min}} = -\frac{\alpha}{2r_0} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$

1. $E = U^{\text{min}} < 0$. Die Bahn ist ein Kreis mit dem Radius r_0 .

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr_0^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi mr_0^2}{M} = \frac{2\pi M^3}{m\alpha^2} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem $L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}$

2. $U^{\min} < E < 0$. Finite Bewegung .

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{d\bar{r} \frac{M}{m\bar{r}^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}} \quad \frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r)) = \frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{M^2}{m^2 r^2}$$

$$= -\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{m}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} = \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{m}\right)^2$$

$$\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} > 0, \quad \Leftrightarrow \quad E > U_{\text{eff}}^{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2} \quad \bar{r} = \frac{1}{\xi}, \quad \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2} = d\xi$$

$$\phi - \phi_0 = \frac{M}{m} \int_{1/r} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{m}\xi - \frac{\alpha}{M}\right)^2}} \quad \xi = \frac{m}{M} \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \cos \theta + \frac{\alpha}{M} \right)$$

$$\phi - \phi_0 = \int_{\arccos\left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}}\right]} d\theta = -\arccos \left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M} \right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \right]$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \qquad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}$$

2. $U^{\min} < E < 0$. Finite Bewegung .

$$\phi - \phi_0 = \int_{\arccos\left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}}\right]} d\theta = -\arccos\left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}}\right]$$

Die Trajektorie ist ein Ellipse (geschlossen); p heisst "Parameter", e heisst "Exzentrizität"

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}}, \quad p = \frac{M}{m\alpha^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad e < 1$$

$$r + er \cos \phi = p \Rightarrow r + ex = p \Rightarrow r = (p - ex) \Rightarrow x^2 + y^2 = (p - ex)^2$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x_0 = -\frac{pe}{1 - e^2}, \quad a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem $L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}$

2. $U^{\text{min}} < E < 0$. Finite Bewegung .

Die Zeit die das Teilchen braucht um das Zentrum zu drehen

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

$$M = mr^2 \frac{d\phi}{dt}, \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{r^2 d\phi}{Mm} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{p^2 d\phi}{Mm(1 + e \cos \phi)^2} \quad T = \frac{p^2}{Mm} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2}$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}), \quad e^{i\phi} = z, \quad d\phi = -i \frac{dz}{z} \quad \int_0^1 d\phi \dots \rightarrow -i \oint \frac{dz}{z} \dots$$

$$T = \frac{4mp^2}{Me^2i} \oint_{|z|} \frac{zdz}{(z^2 + 2e^{-1}z + 1)^2} = \frac{4mp^2}{Me^2i} \oint_{|z|} \frac{zdz}{(z - z_+)^2(z - z_m)^2} \quad z_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} - \frac{1}{e}.$$

$$\left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad T = \frac{4mp^2}{Me^2i} \frac{\pi i}{4e[e^{-2} - 1]^{3/2}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \qquad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}$$

2. $E > 0$. Die Bewegung ist infinit

Die Trajektorie ist eine Hyperbel

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad p = \frac{M}{m\alpha^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad e > 1 \quad \phi = \phi_0 = -\arccos[e^{-1}] \rightarrow r = \infty$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad x_0 = \frac{pe}{e^2 - 1}, \quad a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$$