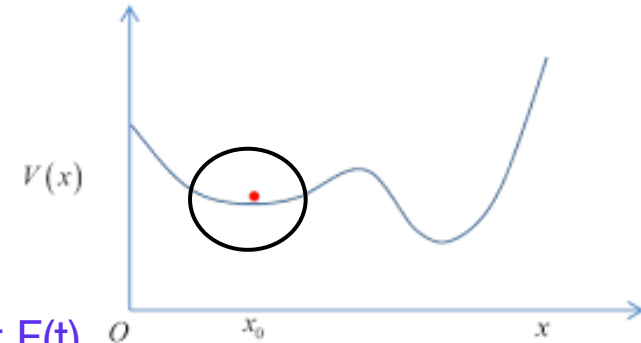


# Die Zusammenfassung

Es ging um kleine Schwingungen — universelle Bewegungsart in der Nähe vom Gleichgewicht eines mechanischen Systems.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \xrightarrow{x \rightarrow x - x_0} L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$$



Erzwungene Schwingungen: Externe, zeitabhängige Kraft  $F(t)$ .

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad x(t) = a_0 \cos(\omega t + \phi_0) + x_{\text{part}}(t) \quad x_{\text{part}} = - \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(\tau - t))$$

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) \xrightarrow{\quad} x = a_0 \cos(\omega t + \phi) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta)$$

Ein Sonderfall:  
der Resonanz

$$\gamma = \omega \xrightarrow{\quad} x(t)|_{\text{res}} \approx \tilde{a}_0 \cos(\omega t + \tilde{\phi}_0) + \frac{ft}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta)$$

Die Reibungskraft begrenzt den Zuwachs der Amplitude

$$f_R = -2m\kappa\dot{x}$$

Freie Schwingungen mit Reibung  $x = Ae^{i\lambda t} \quad -\lambda^2 + 2i\kappa\lambda + \omega^2 = 0, \quad \lambda = -i\kappa \pm \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}$

Erzwungene Schwingungen mit Reibung

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2\kappa\dot{x} = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta) \quad x(t) = \frac{f \cos(\gamma t + \beta + \phi(\gamma))}{m\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\kappa^2}}$$

## 5. Kleine Schwingungen

Schwingungen von mechanischen Systemen mit vielen Freiheitsgraden.

$$L = \sum_{ij} a_{ij}(\{q_i\}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\{q_i\}) \quad 1 < i, j < N$$

$$U(\{q_i\}) = U(\vec{q}_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\vec{q}=\vec{q}_0} (q_i - q_{0i}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}=\vec{q}_0} (q_i - q_{0i})(q_i - q_{0j})$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right] \quad \xi_i = q_i - q_{0i}, \quad m_{ij} = a_{ij}(\vec{q}_0) \quad m_{ij} = m_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}$$

Die summe über j muss angenommen werden

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \Rightarrow m_{ij} \ddot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j = 0 \Rightarrow \hat{m} \ddot{\vec{\xi}} + \hat{k} \vec{\xi} = 0$$

Das System schwingt mit bestimmter Frequenz.

$$\text{Ansatz} \quad \vec{\xi} = \vec{a} \cos(\omega t + \phi) \quad (-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}) \vec{a} = 0 \Rightarrow \det [-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}] = 0$$

Die Eigenfrequenzen des Systems folgen aus der letzter Gleichung. Ein System mit N Freiheitsgraden hat N Eigenfrequenzen, einige können aber entarten sein.

## 5. Kleine Schwingungen

Das bedeutet dass — um Eigenschwingungen zu bestimmen — muss man folgendes machen:

1. die Matrizes  $\hat{m}$  und  $\hat{k}$  finden. 
$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right]$$

2. diese Gleichung lösen um N Eigenfrequenzen zu finden.

$$\det \left[ -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right] = 0$$

3. danach diese Gleichung lösen um N Eigenamplituden zu finden.

$$\left( -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right) \vec{a}_s = 0, \quad 1 < s < N.$$

Nach dem das alles gemacht ist, bekommen wir N Eigenschwingungen des Systems

$$\vec{\xi}_s = \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad 1 < s < N.$$

## 5. Kleine Schwingungen

Viele Freiheitsgraden

$$\vec{\xi} = \vec{a} e^{i\omega t} \quad \left( -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right) \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \left[ -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right] = 0$$

$$\omega^2 = \frac{a_i k_{ij} a_j}{a_i m_{ij} a_j} > 0, \quad \Rightarrow \quad \omega^* = \omega \quad \{ \omega_s \}, \quad (-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}) \vec{a}_s = 0.$$

Eigenschaften der Eigenamplituden ( $\vec{a}$ ): die Amplituden sind meistens "orthogonal"; im Fall entarteter Schwingungen muss man aufpassen — sie sind nicht unbedingt orthogonal.

$$\begin{aligned} -\omega_s^2 a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} + a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} &= 0 \\ -\omega_{s'}^2 a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} + a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (\omega_s^2 - \omega_{s'}^2) a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0$$

$$\begin{aligned} a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} &= \delta_{ss'} \\ a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} &= \omega_s^2 \delta_{ss'} \end{aligned}$$

Diagonalisierung der Lagrangianfunktion: Variablentransformation  $\xi_i = \sum_{s=1}^N r_s a_i^{(s)}$

$$2U = \sum_{ij} k_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \sum_{ij} k_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \omega_s^2 \delta_{ss'} = \sum_s \omega_s^2 r_s^2$$

$$2T = \sum_{ij} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \sum_{ij} m_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \delta_{ss'} = \sum_s \dot{r}_s^2$$

$$L = \sum_{s=1}^N \left[ \frac{\dot{r}_s^2}{2} - \frac{\omega_s^2 r_s^2}{2} \right]$$

$$r_s(t) = C_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

$$\xi_i(t) = \sum_{s=1}^N C_s a_i^{(s)} \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

## 5. Kleine Schwingungen

$$\left(-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}\right) \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \left[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}\right] = 0 \quad \xi_i = \sum_{s=1}^N r_s a_i^{(s)} \quad r_s(t) = C_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$$


---

Ein Beispiel

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2 - 2\alpha xy)$$

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{k} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{O} = -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha \omega_0^2 \\ -\alpha \omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\det[\hat{O}] = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2 \omega_0^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 (1 \pm \alpha)$$

$$\hat{O}_{\pm} = -\omega_{\pm}^2 \hat{m} + \omega_0^2 \hat{k} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix} \quad \hat{O}_{\pm} \vec{a}_{\pm} = 0 \quad \vec{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_+ \vec{a}_+ + r_- \vec{a}_- \quad x = \frac{(r_+ + r_-)}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{(-r_+ + r_-)}{\sqrt{2}}$$

Lagrangefunktion mit Hilfe von Normalkoordinaten umgeschrieben. Unabhängige Schwingungen.

$$L = \frac{\dot{r}_+^2}{2} + \frac{\dot{r}_-^2}{2} - \frac{\omega_0^2(1+\alpha)}{2} r_+^2 - \frac{\omega_0^2(1-\alpha)}{2} r_-^2$$

## 5. Kleine Schwingungen

Erzwungene Schwingungen im Fall eines Systems mit vielen Freiheitsgraden.

Wenn wir die Lagrangfunktion mit Hilfe von Normalkoordinaten umschreiben, bekommen wir unabhängige eindimensionale Probleme.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right] - \sum f_i(t) \xi_i \quad \xi_i = \sum_s a_i^{(s)} r_s$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_s \left[ \dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2 \right] - \sum f_s(t) r_s, \quad f_s(t) = \sum_i f_i(t) a_i^{(s)}$$

## 5. Kleine Schwingungen

Symmetrien in Systemen mit vielen Freiheitsgraden

$$L = \frac{1}{2} \sum m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j$$

Die Lagrangfunktion sei unter einer Transformation invariant:

$$\xi_i \rightarrow \xi'_i = S_{ij} \xi_j, \quad S^2 = \hat{1} \quad (S_{ij} S_{jk} = \delta_{ik}) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{\xi}'_i \dot{\xi}'_j - k_{ij} \xi'_i \xi'_j$$

Es folgt das die Amplitude einer nicht-entarte Normalschwingung unter S entweder symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

$$S \vec{a}^{(s)} = \pm \vec{a}^{(s)}$$

$$\vec{\xi}_s = C \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \quad \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}_s = 0 \quad S^T \hat{m} S = \hat{m}, \quad S^T \hat{k} S = \hat{k}$$

$$S^T \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}^{(s)} = S^T \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] S S \vec{a}^{(s)} = 0.$$

$$0 = S^T \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}^{(s)} = S^T \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] S S \vec{a}^{(s)} = \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] S \vec{a}^{(s)} = \left[ -\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \tilde{a}^{(s)}$$

$$\tilde{a}^{(s)} = S a^{(s)} \quad \text{ist auch die Amplitude einer Normalschwingung mit Frequenz } \omega_s^2.$$

Weil wir angenommen haben, dass die Schwingung nicht entartet ist, muss die neue und die alte Amplitude proportional sein.

$$\tilde{a}^{(s)} = S a^{(s)} = \lambda a^{(s)}, \quad a^{(s)} = S^2 a^{(s)} = \lambda^2 a^{(s)} \quad \Rightarrow \lambda^2 = \pm 1.$$

## 5. Kleine Schwingungen

Beispiel: 
$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2} - \frac{k}{2} ((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2)$$

Die Symmetrie: 
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Die erste Schwingung ist die Bewegung des Systems als Ganzes:

$$\vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega^2 = 0$$

$$\vec{x} = (v_0 t + x_0) \vec{a}^{(1)}$$

Die zweite Schwingung ist antisymmetrisch unter S

$$S\vec{a}^{(2)} = -\vec{a}^{(2)} \Rightarrow \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-\omega^2 m \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) \Rightarrow -\omega^2 m \ddot{x}_1 + kx_1 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Die dritte Schwingung ist symmetrisch unter S

$$S\vec{a}^{(3)} = +\vec{a}^{(3)} \Rightarrow \vec{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^{(1)} \hat{m} \vec{a}^{(3)} = 0 \Rightarrow a = -\frac{2m}{M}$$

$$-\omega^2 m \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) \Rightarrow -\omega^2 m \ddot{x}_1 + kx_1 \left(1 + \frac{2m}{M}\right) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)$$