

Mechanik II

<https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start>

SS 2007
2017

FR: 9:45 - 11:15 h Tulla-HS, 11:40

1 Klausur im Sem., 1 Nachholklausur im WS.

[Bedingungen für Hausaufg., Schein $\rightarrow$ Luminitäts-Angaben]

Ü-Lfg: Luminita Mibaila 2007
Robert Biegler 2017

- Landau Lifshitz: "Klassische Mechanik"

Lit. = Herbert Goldstein: Klassische Mechanik
Wiley - VCH, - Landau-Lifshitz

= Noether'sche Theoreme; Wess Theoretische Mechanik; Sommerfeld; Reduktion

J25475
The Kretz

Inhalt der Vorlesung

1. Lagrange-Mechanik
2. 2. Starre Körper und Kreisel
3. 3. Hamiltonsche Mechanik und kanonische Transformationen
bz. Schw.
4. 4. Spezielle Relativitätstheorie

1. Lagrange-Mechanik

Goldst. Kap. 1.1 - 1.4

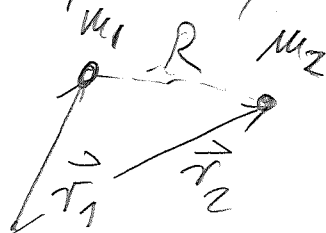
Kartesische Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Newton'sche BGL für N Massenpunkte

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji}, \quad i=1, \dots, N_j \quad (466) \quad (1)$$

↑
äußere
Kräfte

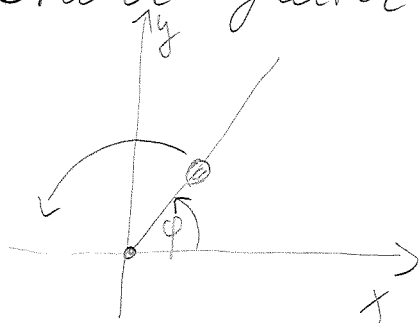
↑
innere Kräfte
 $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

unpraktisch, wenn die Bewegung
eines Körpers durch Zwangsbedingungen
eingeschränkt sind.

Beispiele:1. Zwei Massenpunkte, die starr verbunden
sindZwangsbed.: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = R$

(238)

2. Perle, die auf einem ^{um die z-Achse} rotierenden Draht gleitet:



Zwangsbedingungen:

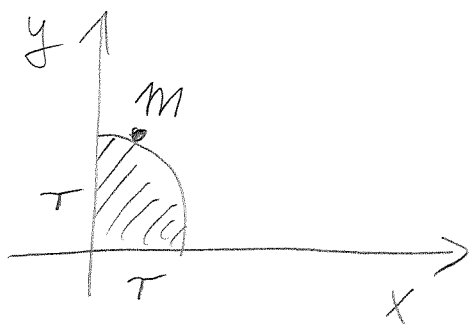
$$\begin{aligned} z &= 0 \\ \arctan \frac{y}{x} &= \omega \cdot t \end{aligned}$$

}

(239)

(3)

3. Münze, die auf einem Viertelzyylinder ruht:

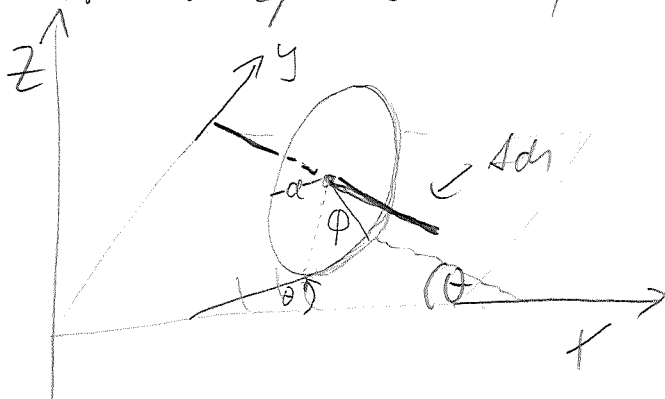


$$x^2 + y^2 \geq r^2$$

(240)

(4)

4. Rad, das auf einer Ebene rollt:



θ = Winkel zw. Scheibenachse und x-Achse

ϕ charakterisiert die Drehung des Rades (i.e. Winkelgeschw. ist $\omega = \dot{\phi}$)

a = Radius

$\Rightarrow$ Geschwindigkeit

$$v = a \cdot \dot{\phi}$$

rollen bedeutet, dass

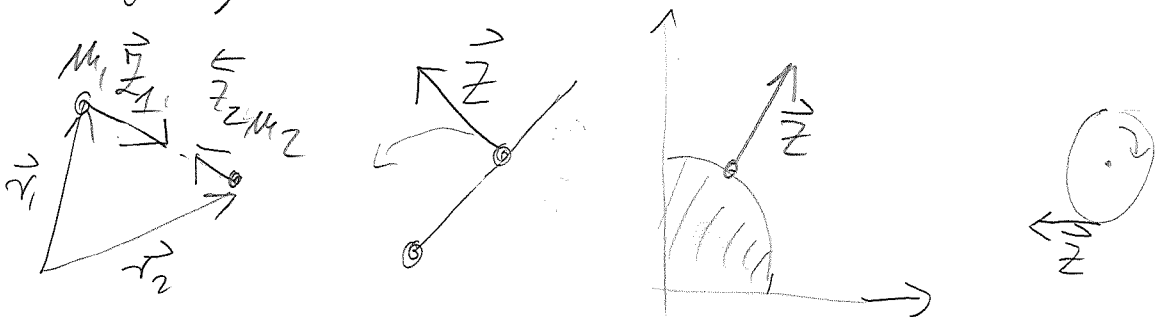
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \cdot \sin \theta = a \cdot \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{y} = -v \cdot \cos \theta = -a \cdot \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (241) \quad (5)$$

wobei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Koordinaten des Scheitelmittelpunkts sind. $z = a$

Und (241) impliziert die Zwangsbedingungen

$$\begin{cases} dx - a \sin \theta d\phi = 0 \\ dy + a \cos \theta d\phi = 0 \end{cases} \quad (242) \quad (6)$$

In allen Beispielen wirken Kräfte $\vec{F}_i$, die die Z-Bedingungen (238) - (240) und (242) erzwingen,



Diese Kräfte heißen Zwangskräfte.

Problem: Sie sind schwer zu bestimmen (abhängig von Zeit, Ort und Bahnkurven $\vec{r}_i(t)$.)

Lösung: Lagrange-Mechanik.

[Klassifizierung von Zwangsbedingungen]

Eine Zwangsbedingung heißt holonom, wenn sie sich in der Form

$$f_{\vec{r}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = 0 \quad (238) \quad (7)$$

schreiben lassen.

(238), (239) sind holonom.

(240), (242) „ nicht-holonom,

die ZB ist eine Ku- bzw. eine Differenzialgleichung.

Zeit { unabhängige } ZB heißen
 { abhängige }

{ skleronom }
 { reonom } .

(238), (240) und (242) sind skleronom.

Ein System aus N Teilchen hat
 $3N$ Koordinaten. Gehen L holonome ZB
 $(l=1, \dots, L \text{ in } (243))$, so ist das System durch
Angabe von
 $3N-L$ Koordinaten eindeutig bestimmt,
es hat $3N-L$ Freiheitsgrade.

⑦ (243) beschreibt eine $(3N-L)$ -dimensionale
Hyperfläche des R^{3N} .

Eine Verschiebung

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (244) \text{ ⑧}$$

die bei konstanter Zeit t erfolgt
und die ZB (243) beachtet,
heißt virtuelle Verschiebung.

Wir betrachten von nun an nur noch den
Fall, dass die auf den i -ten Massen-
punkt wirkende Zwangskraft $\vec{F}_i$
(wie in den Beispielen)
senkrecht auf den Hyperflächen in (243) ⑦
stehen:

$$\vec{F}_{ij} \propto \vec{\nabla}_j f_l(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad (245) \text{ ⑨}$$

wobei $\vec{\nabla}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \\ \frac{\partial}{\partial z_j} \end{pmatrix}$; $\vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$,

22.4, 22.4, 15.4, 20.4, 12
und die gesamte auf m_i wirkende Zwangskraft $\vec{Z}_i = \sum_{e=1}^L \vec{Z}_{ie}$
D.h. Reibungskräfte werden mit
als Zwangskräfte behandelt.

Aus (245) ⁽⁹⁾ folgt:

$$\sum_{j=1}^N \vec{Z}_{ej} \delta \vec{r}_j = 0$$

(246)

(10)

D.h. Zwangskräfte leisten keine
virtuelle Arbeit:

20.4.07
27.4.07

2. Newtonsche Ges.: $\vec{p}_i = \vec{F} = \vec{F}_i^e + \vec{Z}_i$

↑
externe Kräfte

⇒ D'Alembert-Prinzip (D'Alembert'sche BGL):

$$\sum_{j=1}^N (\vec{F}_j^e - \dot{\vec{p}}_j) \delta \vec{r}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^N \vec{Z}_j \delta \vec{r}_j = 0$$

(247)

(11)

25.4.25
Addierung:

Eine zeitabhängige Zwangskraft leistet
im allg. Arbeit, aber keine virtuelle
Arbeit. Bspl: Hebebühne.

25.12

Die generalisierten Koordinaten:

$$q_1, \dots, q_{3N-L}$$

werden so gewählt, dass mit:

$$\vec{r}_j(q_1, \dots, q_{3N-L}), \quad j=1, \dots, N,$$

die ZB (243) (7) erfüllt sind. Beispiel:



$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - R^2 = 0$$

(248)
(12)

i.e. $N=2$; $L=1$; $3N-L=5$:

Wähle z.B.: $q_1 = x_1$ $q_2 = y_1$ $q_3 = z_1$

$q_4 = \varphi$ $q_5 = \theta$, wobei

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

(249)
(13)

Aus (247) (11) folgt dann mit

$$\delta \vec{r}_j = \sum_{k=1}^{3N-L} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k$$

gerade:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{3N-L} \left(\vec{F}_j - \dot{\vec{p}}_j \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

(250)
(14)

Definiert man die generalisierte Kraft

26.11.07
-9-
Fluorid

$$Q_K = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_K}$$

(251) (15)

so liest sich der erste Term in (250) (14)

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{3N-L} \vec{F}_j^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{3N-L} Q_K \delta q_k$$

(252) (16)

hat immer die Dimension Energie

hat nicht unbedingt die Dimension Kraft

Zum zweiten Term in (250) (14)

$$\sum_{j=1}^N \vec{p}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right) - m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right\} \delta q_k$$

(253) (17)

Im zweiten Term in (253) (17) schreibt man

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \vec{r}_j = \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{\vec{r}}_j$$

(254) (18)

Im ersten Term

nutzt man folgenden Trick aus:

(254)

$$\text{Einheitsvektor } \dot{\vec{r}}_j = \sum_{k=1}^{3N-L} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}$$

(255)

(19)

Andererseits betrachtet man $\dot{\vec{r}}_j$ als Funktion von $q_k, \dot{q}_k$ und t :

$$\dot{\vec{r}}_j = \dot{\vec{r}}_j(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Und aus (255) (19) findet man

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}}$$

womit man $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k}$ in (253) (17) setzt:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{3N-L} \vec{p}_j \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_j \dot{\vec{r}}_j \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_j \dot{\vec{r}}_j \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (256) \quad (20)$$

Mit der kinetischen Energie

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j^2 \quad (257) \quad (21)$$

Mit (252) (16) und (256) (20) wird (250) (14) zu

$$\sum_{k=1}^{3N-L} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \delta q_k = 0 \quad (258) \quad (22)$$

Für holonome ZB sind die δq_k unabhängig,
so dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k=1, \dots, 3N-L, \quad (259) \quad (23)$$

gilt.

Ist $\vec{F}_j$ konservativ,

$$\vec{F}_j = -\vec{\nabla}_j V, \quad (260) \quad (24)$$

so findet man aus (254): (15)

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} = - \sum_{j=1}^N \vec{\nabla}_j V \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (261) \quad (25)$$

Und aus (259) ⁽²³⁾ folgen die
Lagrange'schen Bewegungsgleichungen
2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0 \quad (262) \quad (16)$$

In den meisten Fällen hängt V von q_j , aber nicht von $\dot{q}_j$ ab.
Dann kann man mit der
Lagrange-Funktion

$$L = T - V \quad (26)$$

anstelle von (262) schreiben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (263) \quad (27)$$

29.4.22 Was i.d.R. mit "Lagrange'schen Bat" gemeint ist.

25.25

163.77

"ohne Zwangskräfte" (aber mit Kraft)

35.25 1. Beispiel: Freier Massenpunkt in kartesischen und Zylinderkoordinaten

kartesisch: $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$Q_k = F_k$$

$$(259) \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}}_{m\dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F_x$$

$$m\ddot{x} = F_x$$

analog $m\ddot{y} = F_y$, $m\ddot{z} = F_z$

$\Rightarrow$ Newton'sche BGL.

Zylinderkoordinat:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \textcircled{264} \textcircled{28}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \quad \textcircled{265} \textcircled{29}$$

generalisierte Kraft (siehe $\textcircled{251}^{(15)}$):

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \frac{\partial z}{\partial r}$$

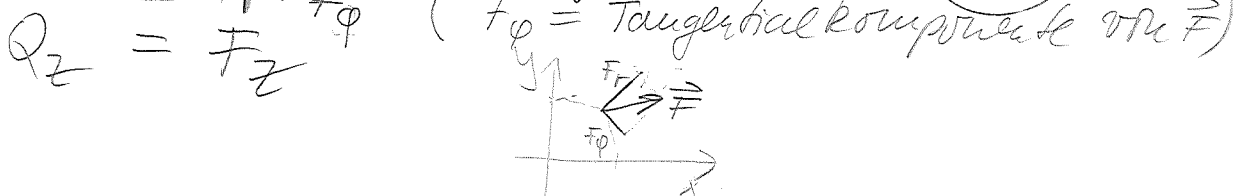
$$= F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi = \cancel{F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi} \quad \textcircled{266} \textcircled{30}$$

(Radialkomponente von $\vec{F}$)

$$Q_\varphi = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$= -F_x \cdot r \sin \varphi + F_y \cdot r \cos \varphi \quad \textcircled{267} \textcircled{31}$$

$$= r \cdot F_\varphi \quad (F_\varphi = \text{Tangentialkomponente von } \vec{F})$$



$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

(23)

(25g) $\Rightarrow$

$$m \ddot{r} - \underbrace{m r \dot{\varphi}^2}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}} = F_r$$

(268) (32)

Zentripetalbeschleunigung

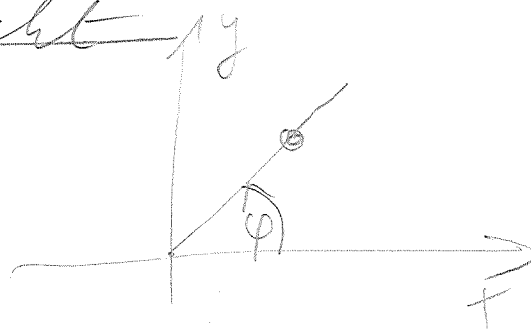
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

(23)

$$(25g) \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi})}_{\substack{\text{Drehimpuls} \\ \cancel{L_z} \quad L_z}} = \underbrace{\tau F_{\varphi}}_{\substack{\text{Drehmoment} \\ \cancel{M_z} \quad M_z}} \quad (269) (33)$$

Die dritte Bahn ist einfach

$$m \ddot{z} = F_z$$

2. Beispiel: Perle auf rotierendemDraht
 $\nearrow$ konstant
 $\varphi = \omega \cdot t$

Ebene Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Zwangsbedingungen:

$$\varphi = \omega \cdot t, \quad z = 0.$$

Generalisierte Koordinate: r

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \omega^2$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} - m r \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = r \omega^2 \quad \text{Zentrifugalbesch.}$$

- Die Perle ~~bewegt sich~~ ^{wird} nach außen beschleunigt.

Lösung von (270) (34)

Trick: Durchmultiplizieren mit $\dot{r}$:

$$\dot{r} \ddot{r} = \dot{r} r \omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = \left(\frac{d}{dt} r^2 \right) \omega^2$$

$$\dot{r}^2 = \omega^2 r^2 + C$$

↑
Integrationskonst.

$$(271) \quad (35)$$

274.7

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\omega^2 r^2 + C}$$

(272) (36)

Separation der Variablen:

$$\pm \int_0^{\dot{r}} \frac{\dot{r}}{\sqrt{\omega^2 r^2 + C}} dt' = \int dt'$$

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\omega^2 r^2 + C}} = t - t_0 \quad \text{Integrationsergebnis}$$

(273) (37)

C > 0: Substitution: $r = \frac{\sqrt{C}}{\omega} \sinh \vartheta$

Wegen $(\sinh \vartheta)^2 + 1 = (\cosh \vartheta)^2$ ist

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\omega^2 r^2 + C}} = \pm \frac{1}{\omega} \int \frac{\cosh \vartheta d\vartheta}{\cosh \vartheta} = \pm \frac{\vartheta + \text{const}}{\omega} = \pm \frac{\text{arcsinh}(r \frac{\omega}{\sqrt{C}}) + \text{const}}{\omega}$$

$$\Rightarrow r = \pm \frac{\sqrt{C}}{\omega} \sinh(\omega t - \omega t_0)$$

(274) (38)

Wegen $r \geq 0$ gilt für $\{t \geq t_0\}$ das
 $\{ \text{obere} \}$ Vorzeichen. [Für $t < t_0$: Ausgeskl., dass für $t = t_0$ die Perle mit $\dot{r} = -\sqrt{C}$ die Ursprung geht.]

C < 0: Substitution $r = \frac{\sqrt{C}}{\omega} \cosh \vartheta$

$$\Rightarrow r = \pm \frac{\sqrt{C}}{\omega} \cosh(\omega t - \omega t_0)$$

(275) (39)

Für $t = t_0$ nimmt r den Minimalwert

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{C}}{\omega} \text{ an.}$$

$$\underline{c=0}: \quad \pm \int \frac{\dot{r}}{\omega r} dt = \int dt$$

$$\pm \ln \frac{r}{r_0} = \omega t$$

$$r = r_0 e^{\pm \omega t}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \pm \omega r_0 e^{\pm \omega t} = \pm \omega r$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \Rightarrow (270) \text{ erfüllt.}$$

Berechnung der Zwangskraft:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \text{ denn } \vec{F}^{(e)} = 0.$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{b. } \dot{\varphi}=\omega}{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi & -r \cdot \omega \cdot \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi & +r \cdot \omega \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi & -2\dot{r}\omega \sin \varphi & -r\omega^2 \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi & +2\dot{r}\omega \cos \varphi & +r\omega^2 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(270)}{=} 2\dot{r}\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(272)}{=} \pm 2\sqrt{\omega^2 r^2 + c} \cdot \omega \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi}$$

$$\stackrel{19.5}{\vec{F}} = \pm 2M\omega\sqrt{\omega^2 r^2 + c} \cdot \vec{e}_\varphi$$