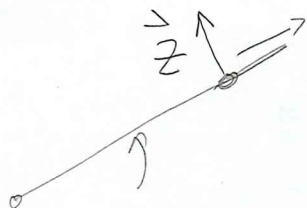


16.5.2015 $\dot{r} > 0$



$\dot{r} < 0$

oder



S.V. 07
-18-
Thema B

16.5.22

13.5.22

Die Zwangskraft steht senkrecht auf der Zwangsbedingung, aber nicht senkrecht (auf der) Bewegungsrichtung und wirkt nach links. [Vgl. Bewegung auf drehendem Rad, Coriolisbesch.]

Virtuelle Verschiebung $\delta \vec{r} \propto \vec{e}_r$

↳ Arbeit: $\vec{Z} \delta \vec{r} \propto \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_r = 0$.

Verrichtet $\vec{Z}$ Arbeit?

Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \stackrel{(277)}{=} \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

$$\stackrel{(271)}{=} \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 + C + r^2 \omega^2) = m \omega^2 r^2 + \frac{m}{2} C$$

Energie-Erhaltung: Die von $\vec{Z}$ im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ geleistete Arbeit ist

$$W = T(t_2) - T(t_1) = m \omega^2 [r(t_2)]^2 - [r(t_1)]^2$$

[$W < 0$ für $r(t_2) < r(t_1)$; d.h. Aufwandsbew. (278) (42) mit $\dot{r} < 0$.]

Geschwindigkeitsabhängige Potentiale

(Kap. 4.5 von Goldstein)

Konservative gen. Kräfte:

$$Q_k \stackrel{(261)}{=} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad \text{mit } V = V(q_k)$$

Verallgemeinerung:

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \quad (279) \quad (43)$$

mit ~~einem~~ geschwindigkeitsabh. Potential

$$U = U(q_k, \dot{q}_k)$$

(259) $\Rightarrow$ Mit $L = T - U$ gelten die Lagrange'schen
BGL (263) ebenfalls.

Wichtige Anwendung: ^{geladenes} Teilchen im
Magnetfeld $\vec{B}$.

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \cdot \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elektrisches} \\ \text{Feld}}}{\vec{E}} + \dot{\vec{r}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Magnetfeld}}}{\vec{B}} \right\}$$

(280) (44)

12.5. $\uparrow$

19.5.17

3. V. A
-20-
Prob

Wichtige Eigenschaft ^{von} eines Magnetfeldes:
(4. Maxwell'sches Gesetz).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} := \operatorname{div} \vec{B} := \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

" Divergenz.

(281)
(45)

Was ist $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$?

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k$$

$$\stackrel{\text{Theor. A}}{=} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j,l=1}^3 \epsilon_{kjl} \frac{\partial A_l}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{j,k,l=1}^3 \underbrace{\epsilon_{kjl}}_{\text{antisymm.}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}}_{\text{symm.}} A_l = 0$$

(282)
(46)

" $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ ".

Die Umkehrung gilt auch:

Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt, dass es ein $\vec{A}$ mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(283)
(47)

gibt; (Hier ohne Beweis.)

$\vec{A}$ heißt magnetisches Vektorpotential.

Die 2. Maxwell'sche Gleichung
ist:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

(284)

(48)

(49)

(283)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

(285)

(49)

$\Rightarrow$ Es gibt eine Funktion ϕ , so
dass

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \phi$$

(286)

(50)

(Erinnerung: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \text{rot grad } \phi = 0$.)
[vgl. Diskussion über konserv. Kräfte.]

ϕ heißt elektrisches Potenzial

Mit (283) und (286) wird (280) zu

$$\vec{F} = q \left[-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]$$

(287)

(51)

Nun ist

$$\left[\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_k = \sum_{l,m} \epsilon_{klm} \dot{x}_l (\vec{\nabla} \times \vec{A})_m$$

$$= \sum_{l,m,n} \epsilon_{klm} \dot{x}_l \epsilon_{mnp} \frac{\partial A_p}{\partial x_n}$$

Übung TheoA

$$= \sum_{l,m,n} [\delta_{kl} \delta_{mp} - \delta_{kp} \delta_{lm}] \dot{x}_l \frac{\partial A_p}{\partial x_n}$$

$$= \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (\dot{x}_l A_l) - \dot{x}_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} (\dot{\vec{r}} \vec{A}) - \sum_l \dot{x}_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \quad (288) \quad (52)$$

Der zweite Term ist gerade

$$- \left(\frac{dA_k}{dt} - \frac{\partial A_k}{\partial t} \right), \text{ so dass } (288) \text{ zu } (52)$$

$$[\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})] = \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (289) \quad (53)$$

wird. Unsere Lorentzkraft in (287) (51) wird zu

$$\vec{F} = q \left[-\vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right]$$

bzw:

$$= q \left[-\vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right]$$

$$F_k = q \left[-\frac{\partial}{\partial x_k} (\Phi - \dot{\vec{r}} \vec{A}) - \frac{d}{dt} A_k \right] \quad (290) \quad (54)$$

$$= - \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_k}$$

Mit

$$U = q \Phi - q \cdot \underbrace{\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}}_{\sum_k A_k \dot{x}_k} \quad (291) \quad (55)$$

↑₂₇₉ was die gewünschte Form von (279) hat. (43)

135-

↑

↓

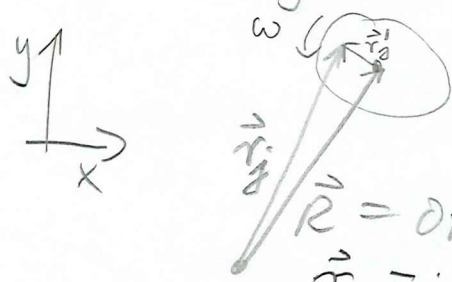
20.5.
2012

Damit ist die Lagrange-Funktion des geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$L = T - q \cdot \Phi + q \cdot \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (292) \quad (56)$$

Typische Situation:

Ein starrer Körper aus N Massenpunkten dreht sich um eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht. Die ~~Richtung~~ Orientierung der Achse ist konstant (senkrecht zur Zeichenebene)



$\dot{s}_j$ const:
 $|\dot{\vec{r}}_j'| = \text{const.}$

$\vec{R}$ = Ortsvektor des Schwerpunkts (in Zeichenebene)

$$\vec{r}_j = \vec{R} + \vec{r}_j' \quad ; \quad \dot{\vec{r}}_j = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_j' = \begin{pmatrix} s_j \cos \omega t \\ s_j \sin \omega t \\ \dot{z}_j \end{pmatrix} \quad \text{mit } z_j = \text{const.}$$

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_j')^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} s_j = \text{Abstand von } \vec{r}_j \text{ zur Drehachse} \end{array} \right.$$

$$= T_S + \underbrace{\dot{\vec{R}} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j'}_{\substack{\frac{d}{dt} \sum \frac{m_j}{2} r_j^2 \\ = 0 \\ \text{wg. Schwerpunkt}}} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j'^2 = T_S + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j s_j^2 \omega^2$$

(293) (57)

$$T_S = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 \quad \text{mit } M = \sum m_j$$

ist die kinetische Energie des Schwerpunkts

Mit dem Trägheitsmoment

$$\Theta := \sum_{j=1}^N m_j s_j^2$$

(294) (58)

ist T in (293) ⁽⁵⁷⁾ gleich

$$T = \bar{T}_S + T_{\text{rot}}$$

(295) (59)

mit

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Theta}{2} \omega^2$$

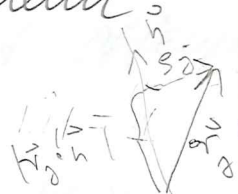
(296) (60)

Achtung: $\Theta = \Theta(\vec{n})$ hängt von der

Drehachse $\vec{n}$ ab ($|\vec{n}|=1$), denn

$$s_j = |\vec{r}_j - (\vec{r}_j \cdot \vec{n}) \vec{n}|$$

$$\stackrel{!}{=} |\vec{r}_j'|^2$$



Variationsrechnung

11.11.11 Sei f eine Funktion von $y, y' = \frac{dy}{dx}$ und x .

Gesucht wird eine Funktion $y=y(x)$, so dass

$$J[y] := \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx,$$

(297) (61)

abhängt. Die Lösung ⁽⁶³⁾ (299) sei in der Schar enthalten für $\alpha_j = \alpha_j^{(0)}$, $j=1, \dots, n$.
Die Funktion

$$\tilde{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := J[y_{\alpha}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x)]$$

hat dann eine Minimum bei ⁽⁶¹⁾ $\alpha_j = \alpha_j^{(0)}$ und, für den allg. Fall ⁽²⁹⁷⁾ (297),

$$0 = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \alpha_j} \stackrel{(298)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha_j} \right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_j \partial x} \right] dx$$

partiell integrieren

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} \right] dx$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} \right]_{x_1}^{x_2}$$

(300) ⁽⁶⁴⁾

$$\frac{\partial y(x_1)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial y(x_2)}{\partial \alpha_j} = 0, \text{ weil } y(x_{1,2}) = y_{1,2}.$$

⁽⁶⁴⁾ (300) wird zu

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha_j} dx$$

(301) ⁽⁶⁵⁾

Weil $y_d(x)$ beliebig gewählt ist,
kann (301)⁽⁶⁵⁾ nur erfüllt sein, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (302) (66)$$

gilt.

Übliche Schreibweise

$$\delta \mathcal{F} := \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_j = \alpha_j^{(0)}} d\alpha_j \quad \text{Variation von } \mathcal{F}$$

und $\sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_j = \alpha_j^{(0)}} \cdot d\alpha_j =: \delta \mathcal{F}$

$\sum_{j=1}^n (301)^{(65)} \cdot d\alpha_j$ ist dann:

$$0 = \delta \mathcal{F} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y \, dx = 0 \quad (303) (67)$$

Funktionalableitung $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$

Anwendung von (302)⁽⁶⁶⁾ auf unser Beispiel

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

(66) (302) $\Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C = \text{const}$