

$$\Rightarrow y'^2 = c(1+y'^2)$$

$$y'^2 = \frac{c}{1-c} =: a^2, \quad a > 0;$$

$$\Rightarrow y' = a;$$

$$\Rightarrow y = a \cdot x + b$$



müssen so bestimmt werden, dass

$y(x_1) = y_1$, und $y(x_2) = y_2$ ist,

d.h. wir haben $\begin{pmatrix} 299 \\ 63 \end{pmatrix}$ gefunden.

20.3.22 [Experimentelle Lsg.: Bummiband zw.
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$]

27.5.22 Spannungsr.
 ↑

Brachistochrone

= „Kurve kürzester Zeit“

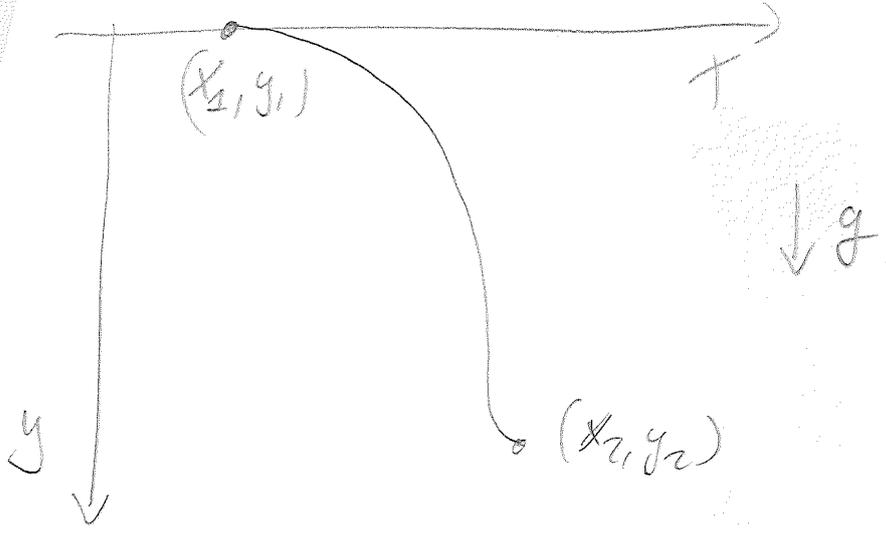
= Kurve von (x_1, y_1) nach
 (x_2, y_2) , entlang der sich

Massepunkt die kürzeste

Zeit vom Anfang zum

Ende braucht. (Johann Bernoulli)

[Marmorbahnbau]



$y_1 = 0$

Zeit

$$T[y] = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{|\dot{\vec{r}}|} \quad ; \quad \text{(304) (68)}$$

Energiesatz: $\frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 = mgy$
 $\Rightarrow |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2gy}$

Mit $ds = dx \sqrt{1+y'^2}$ wird 304 68

zu

$$T[y] = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad \text{(305) (69)}$$

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} \quad \text{(306) (70)}$$

↑ 11.V.

302 (66)

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

11.7.07
-30
Pres B

$$\Rightarrow 1 + y'^2 + 2y \cdot y'' = 0$$

307 (71)

Trick: $y'^2 + a \cdot y y'' = (y')^{-a+1} [y'^{a+1} + a y'^{a-1} y y''] = y'^{1-a} \frac{d}{dx} [y'^a \cdot y]$
für $a \in \mathbb{C}$.

$a=2$
 $\Rightarrow y' + y'^3 + 2y \cdot y'' y' = 0$

$$\frac{d}{dx} [y + y'^2 y] = 0$$

$$y + y'^2 y = C_1$$

$$1 + y'^2 = \frac{C}{y}$$

Separation der Variable: $y' = \pm \sqrt{\frac{C}{y} - 1}$

308 (72)

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{\frac{C}{y} - 1}} = dx$$

$$\Rightarrow x(y) = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C}{y} - 1}}$$

(308a)

Dominiert: Lösung für $x \geq 0$:

$$x(y) = \frac{C}{2} \arccos \frac{C-2y}{C} - \sqrt{y(C-y)} + D$$

(73)

(309)

Dies ist die Gleichung einer Zykloiden
gewöhnlichen

(1598 Galilei findet die Zykloide)

mit Abrollradius $\frac{C}{2}$.

Nützlich: Parameterdarstellung $(y(0) = y_1 = 0)$

$\rightarrow y = \frac{1}{2}C (1 - \cos \varphi)$ (310) (74)

φ heißt Wälzwinkel

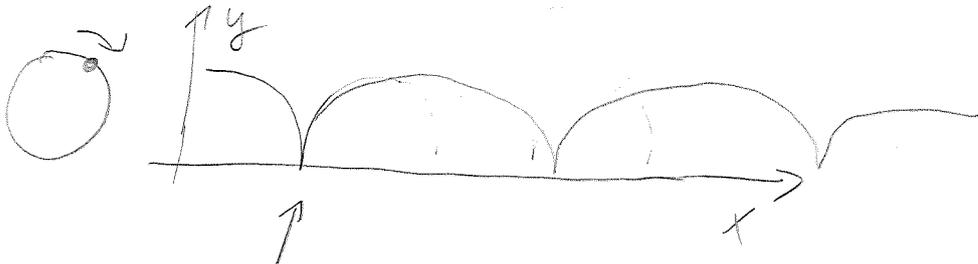
(33)
(309) \Rightarrow

$\rightarrow X(\varphi) = \frac{1}{2}C \cdot [\varphi - \sqrt{(1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)}] + D$

$\rightarrow = \frac{1}{2}C [\varphi - \sin \varphi] + X(0)$; wg $D = X(0)$.

(310) und (311) erfüllen (309) für $0 \leq \varphi \leq \pi$, nur dort ist (311) (75) monoton, sehen aber die Lösung für alle φ kommt fort.
Bahnkurve eines Punktes auf rollender Kreisscheibe (z.B. Fahrradventile):

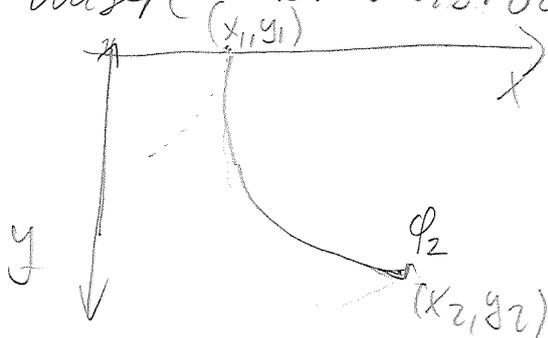
26.5. 2017
2.6. 2017



Aus (308) sieht man sofort:

Bei $\varphi = 0 \text{ mod } 2\pi$ ist (siehe (310) (74)) $y = 0$, also $y' = \pm \infty$.

Unsere Brachistochrone ist also



$D = X(0) = X_1$; $y_1 = 0$

Aus (311) (75), (312) (76) folgt φ_2 via

$\frac{x_2 - x_1}{y_2} = \frac{\varphi_2 - \sin \varphi_2}{1 - \cos \varphi_2}$ (312) (76)

und daraus mit (310) (74)

$C = 2 \frac{y_2}{1 - \cos \varphi_2}$ (313) (77)

\rightarrow

Zykloide

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Eine **Zykloide** (v. lat. *cyclus* bzw. griech. *kyklos* = Kreis + griech. *-eidés* = ähnlich) auch **zyklische Kurve** oder **Radkurve** ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Leitkurve, zum Beispiel einer Geraden beschreibt.

Inhaltsverzeichnis

- 1 Mathematische Darstellung der Zykloiden
- 2 Eigenschaften der Zykloide
 - 2.1 Die Tautochronie der Zykloide
- 3 Epi- und Hypozykloide
- 4 Zykloidenverzahnung in der Getriebetechnik
- 5 Wichtigste Erkenntnisse im 17. Jahrhundert
- 6 Siehe auch
- 7 Weblinks

Mathematische Darstellung der Zykloiden

Eine Zykloide kann als analytische Gleichung und in Parameterdarstellung dargestellt werden.

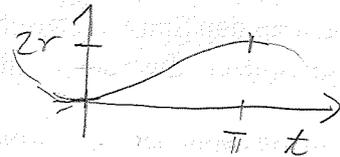
Die Parameterdarstellung lautet

$$x = r(t - \sin(t)); \quad y = r(1 - \cos(t)),$$

wobei r den Radius des Kreises und t den Parameter ("Wälzwinkel") bezeichnet.

Aus dieser lässt sich der Parameter t entfernen. Die analytische Gleichung lautet

$$x(y) = r \arccos\left(\frac{r-y}{r}\right) - \sqrt{y(2r-y)}.$$

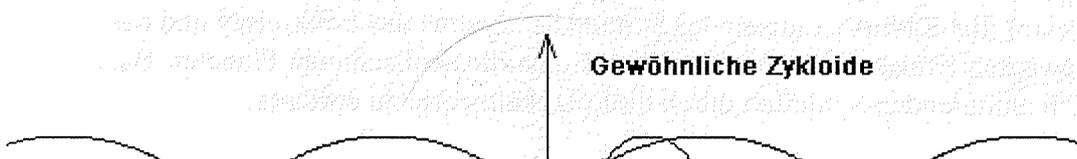


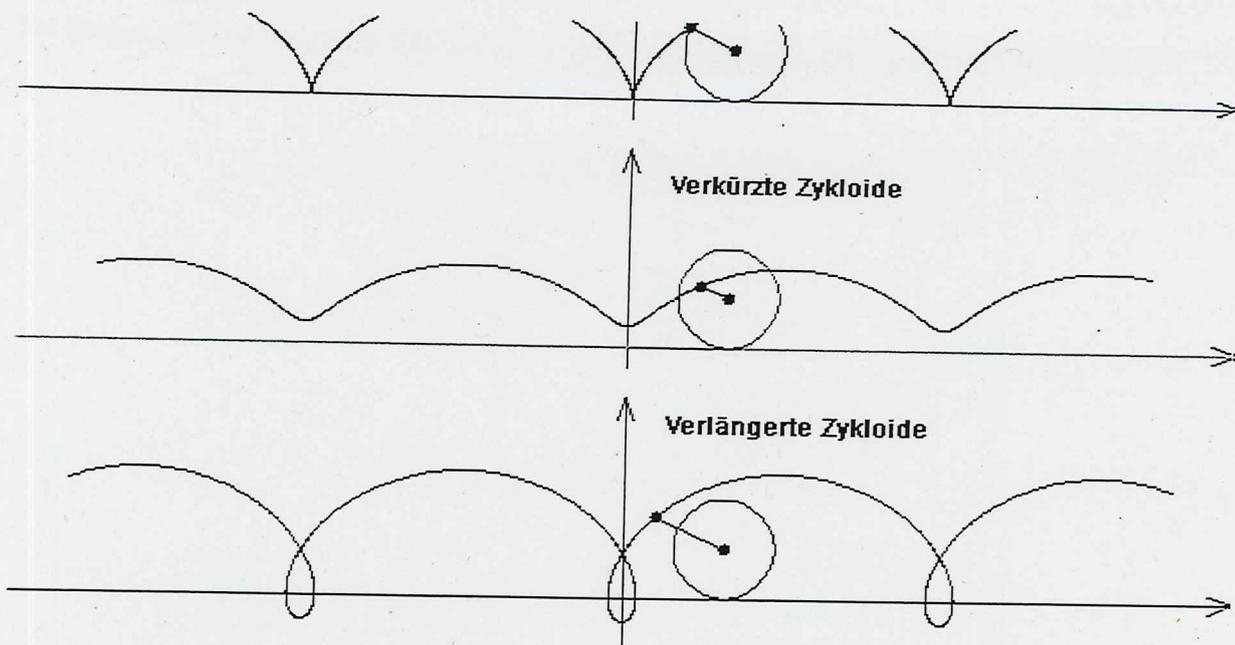
korrekt für $0 \leq t \leq \pi$

Eigenschaften der Zykloide

Eine **gewöhnliche Zykloide** entsteht, wenn ein Kreis auf einer Geraden abrollt. Anschaulich gesprochen bewegt sich ein Punkt auf einem Reifen eines fahrenden Fahrrades (näherungsweise das Ventil) auf einer gewöhnlichen Zykloide. Die Katakaustik, die Evolute und die Evolvente der Zykloide sind selber wieder Zykloiden. Die Mittelpunkte der Krümmungskreise einer Zykloiden liegen vollständig auf ihrer Evolute.

Eine **verkürzte Zykloide** entsteht, wenn die Bahn eines Punktes im Inneren des Kreises betrachtet wird, anschaulich etwa der Seitenstrahler beim Fahrrad. Eine **verlängerte Zykloide** setzt dagegen voraus, dass ein Punkt außerhalb des abrollenden Kreises sich mit dem Kreis mitbewegt. Diese beiden Kurven heißen auch **Trochoiden** (griech. *trochos*, »Rad«).





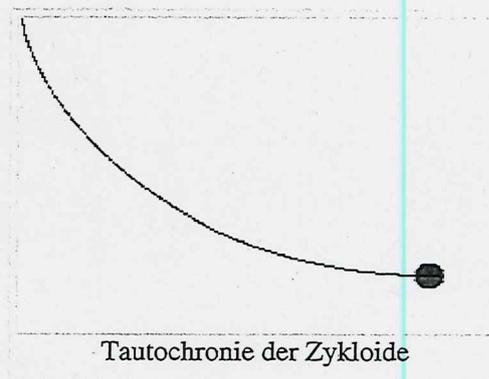
Beispiele: Gewöhnliche Zykliden werden von Punkten auf der Lauffläche eines Autoreifens oder sonstiger Laufräder (Eisenbahn, Seilbahn) und von den Punkten längs der Lauffläche rollender Murmeln beschrieben. Verkürzte Zykliden werden von Punkten mit einem Radius kleiner dem der Lauffläche beschrieben, etwa Punkte von Fahrradspeichen oder die Ansatzpunkte von Pleuelstangen bei einer Dampflokomotive. Verlängerte Zykliden werden von Punkten mit einem Radius größer dem der Lauffläche beschrieben; im Fall von Eisenbahnen wären das alle Punkte des Spurkranzes.

Die Form einer gewöhnlichen Zyklide gleicht einer Aneinanderreihung weiterer Bögen, die verlängerte Zyklide weist an den Spitzen zwischen den Bögen noch Schleifen auf, während bei den verkürzten Zykliden die Spitzen abgerundet sind.

Eine Brachistochrone beziehungsweise Tautochrone entsteht durch Spiegelung einer Zyklide an der x -Achse.

Die Tautochronie der Zyklide

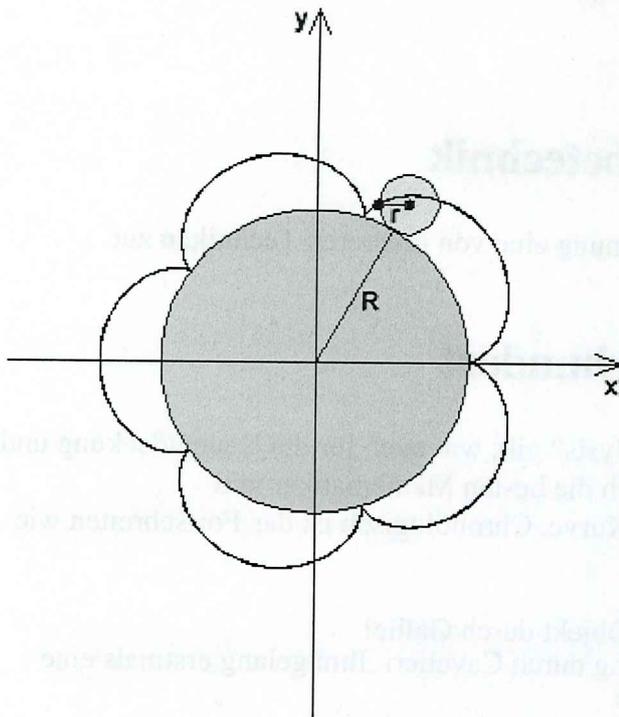
Vorausgesetzt, dass Luftwiderstand und Reibung zu vernachlässigen sind, gelangt ein frei beweglicher Massepunkt von jedem Startpunkt auf der Zyklide stets in derselben Zeit an den tiefsten Punkt. Diese Eigenschaft wird auch Tautochronie genannt (Linie gleicher Fallzeit; *griech.* tauto: das Selbe, chronos: Zeit).



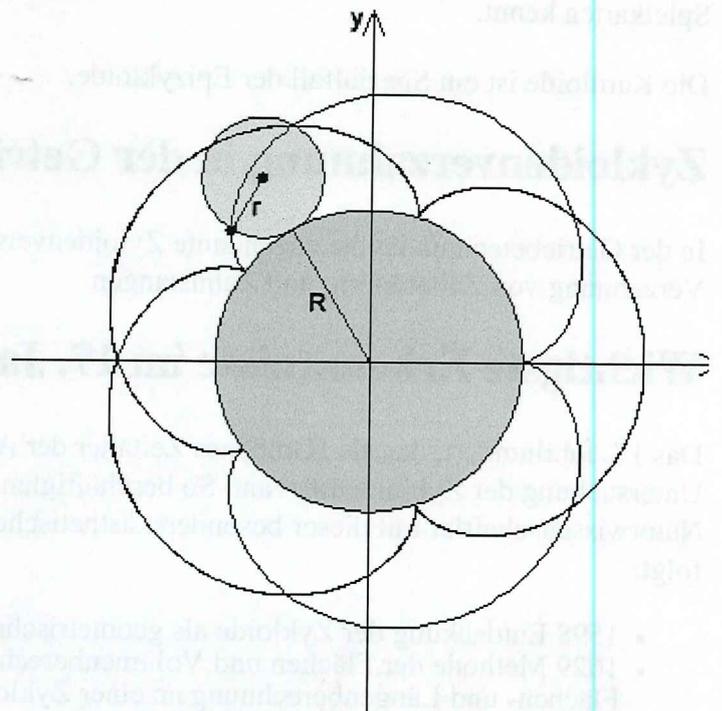
Epi- und Hypozykloide

Rollt der Kreis dagegen außen auf einem anderen Kreis ab, entstehen **Epizykloiden** (*griech.* *epíkyklos*, »Nebenkreis«). Ihr Radius ist gleich der Summe des Radius des Leitkreises und des Durchmessers des bewegten Kreises. Historisch versuchte man die beobachteten Planeten-Bahnen mit teilweise eigentümlich anmutenden Schleifen durch die Epizykeltheorie zu erklären.

Epizykloiden



$$R/r = 5$$



$$R/r = 2,5$$

Rollt der Kreis innen auf dem anderen Kreis ab, entstehen blumig anmutende Kurven, so genannte **Hypozykloiden**. Dieser Effekt wird auch als Spielzeug als Spirograph vermarktet in Form von Zahnrädern aus Plastik, die in ihrem Inneren Löcher zum Durchstecken einer Bleistiftspitze enthalten. Die »Leitkurve« wird (in Form einer großen Scheibe mit ausgestanztem Zahnrad im Inneren) auf einem Blatt Papier festgesteckt und danach wird so lange mit dem eingesteckten Stift das abrollende Zahnrad bewegt, bis sich eine geschlossene Kurve ergibt.

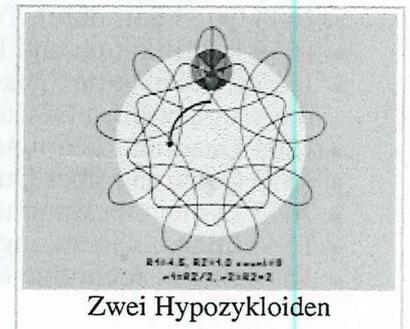
Sowohl **Epizykloiden** als auch **Hypozykloiden** sind genau dann geschlossene Kurven, wenn sich das Verhältnis der Radien als Bruch aus zwei ganzen Zahlen schreiben lässt, wenn es also rational ist. Bei der technischen Umsetzung in Form von Zahnrädern ist dagegen die Anzahl der Zähne maßgeblich, so dass sich stets geschlossene Kurven ergeben.

Für die Anzahl der "Schleifen" n von aus einem äußeren Kreis mit dem Radius r_a und einem inneren Kreis mit dem Radius r_i entstehenden Epizykloiden, gilt der Zusammenhang

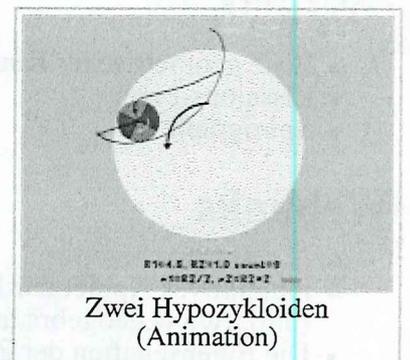
$$n = \frac{\max(r_a, r_i)}{\text{ggT}(r_a, r_i)},$$

für Hypozykloiden verkürzt sich diese Formel auf

$$n = \frac{r_a}{\text{ggT}(r_a, r_i)}.$$



Zwei Hypozykloiden



Zwei Hypozykloiden (Animation)

Eine Sonderform der Hypozykloide (die *Astroide*) entsteht, wenn der Radius des innen abrollenden Kreises genau ein Viertel des äußeren ist und der mitlaufende Punkt ganz außen liegt: das »Karo«, wie man es von Spielkarten kennt.

Die Kardioide ist ein Spezialfall der Epizykloide.

Zykloidenverzahnung in der Getriebetechnik

In der Getriebetechnik ist die sogenannte Zyloidenverzahnung eine von mehreren Techniken zur Verzahnung von Zahnrädern und Zahnstangen.

Wichtigste Erkenntnisse im 17. Jahrhundert

Das 17. Jahrhundert, das als „Goldenes Zeitalter der Analysis“ gilt, war auch für die Neuentdeckung und Untersuchung der Zykloide relevant. So beschäftigten sich die besten Mathematiker und Naturwissenschaftler mit dieser besonders ästhetischen Kurve. Chronologisch ist das Fortschreiten wie folgt:

- 1598 Entdeckung der Zykloide als geometrisches Objekt durch Galilei
- 1629 Methode der Flächen und Volumenberechnung durch Cavalieri. Ihm gelang erstmals eine Flächen- und Längenberechnung an einer Zykloide
- 1629 Forschungsanstöße durch Mersenne
- 1634 Quadratur durch Roberval
- 1635 Quadratur durch Descartes und Fermat
- 1638 Tangentenkonstruktion durch Roberval
- 1641 Tangentenkonstruktion durch Torricelli
- 1643 Quadratur durch Torricelli in Beziehung zur Schraubenlinie
- 1658 Rektifikation und Bestimmung der Zykloidenlänge durch Wren
- 1659 Rektifikation, Quadratur, Schwerpunktbestimmung, Kubaturen durch Pascal auf ein Preisausschreiben Newtons 1658
- 1664 Quadratur über unendliche Reihe durch Newton
- 1673 Quadratur über Quadratrix durch Leibniz
- 1673 Evolutenbestimmung und Tautochronie durch Heygens
- 1686 Integraldarstellung durch Leibniz
- 1697 Brachistochronie durch Johann Bernulli

Siehe auch

- Liste geometrischer Kurven
- Lissajous-Figur
- Spirograph

Weblinks

- interaktives Applet zur Erzeugung von Rollkurven (http://www.geogebra.at/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/lwolf/zykloiden/zykloiden.html)
- Die Eigenschaften der Zykloide aus mathematischer, physikalischer und historischer Sicht (<http://www.tfh-berlin.de/~schwenk/Lehrgebiete/heuer/Welcome.html>)
- Mathematische Erklärung zu Zykloiden (<http://www.kugelbahn.info/deutsch/schaukel/zyklo.html>)
- Java-Animation zum leichten Verständnis von Zykloiden (<http://www.math.uni-wuppertal.de/~frommer/SiTe/epi.html>)

Von „ <http://de.wikipedia.org/wiki/Zykloide>“

Kategorien: Geometrische Kurve | Analysis

Variationsrechnung für ein Funktional
mehrerer unabhängiger Funktionen $y_1(x)$,
... $y_n(x)$:

$$J[y_1, \dots, y_n] := \int_{x_1}^{x_2} f(y_j(x), y_j'(x), x) dx$$

(314)
(78)

Analog zu (303) ⁽⁶⁷⁾ findet man

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_j'} \right) \delta y_j dx$$

(315)
(79)

Alle δy_j sind unabhängig:

$$\delta J = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_j'} = 0 \quad j=1, \dots, n$$

(316)
(80)

Mit

$$x \rightarrow t$$

$$y_j \rightarrow q_j$$

$$f(y_j, y_j', x) \rightarrow L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

folgt aus (316) ⁽⁷⁹⁾⁽³¹⁵⁾⁽⁸⁰⁾ das Hamiltonsche Prinzip
(= Prinzip der kleinsten Wirkung):

„Ein durch die verallg. Koordinaten q_1, \dots, q_n
beschriebenes mechanisches System durchläuft
diejenige Bahn $q_j = q_j(t)$, für die

die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$$

(317) (81)

extremal wird, (d.h. $\delta S = 0$) wird."

Nett: Das Hamilton'sche Prinzip ist unabhängig vom Koordinatensystem [formuliert].

[Tür zur Feldtheorie, Quantenfeldtheorie \rightarrow Qu.-fluktuation mit $\delta S \neq 0$.]

27.5
3.6.2027

Verh. H. Egn

Lagrange-Gleichungen 1. Art

Die Lagrange-Gl. 1. Art haben drei Vorteile:

- i) Die Koordinaten q_j müssen nicht unabhängig sein, d.h. sie können noch Zwangsbedingungen unterliegen.
- ii) Sie liefern die Zwangskräfte mit. [Dynam. Lasten, Baustatik, Schienenbau]
- iii) Sie sind auch für nicht holonome z.B. anwendbar, die sich differenziell schreiben lassen:

$$\sum_k a_{ek} dq_k + a_{e0} dt = 0; \quad e=1, \dots, L$$

Beispiel: Rollen (siehe Gl. 242),

mit $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi$ ist $L=2$;

$a_{40} = a_{20} = 0$ und

$$(a_{ek}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \sin \theta \\ 0 & 1 & a \cos \theta \end{pmatrix}$$

(319) (83)

Vorbereitung:

(82) (318) schließt den Fall holonomes z.B. ein:

17.10.17
-34-
Theil

$$f_e(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (320) \quad (84)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_e}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_e}{\partial t} dt = 0, \quad (321) \quad (85)$$

$$\text{also } a_{e0} = \frac{\partial f_e}{\partial t} \text{ und } a_{ek} = \frac{\partial f_e}{\partial q_k} \quad (322) \quad (86)$$

Ist man umgekehrt eine Lösung $q_k(t)$ gefunden, die (321) erfüllt, so folgt

$$f_e(q_1, \dots, q_n, t) = C_e = \text{const.}$$

Ist (320) für die Anfangsbedingung $q_k(t_0)$ erfüllt, so ist $C_e = 0$ und die Lösung von (321) erfüllt (320) für alle t .

[Nun zur Herleitung:]

$$(81) (317), (315) \Rightarrow$$

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \quad (323) \quad (87)$$

Variation bei konst. t .

Mit (318) verträgliche Variationen erfüllen

$$\sum_{k=1}^n a_{ek} \delta q_k = 0 \quad \text{für } l=1, \dots, L. \quad (324) \quad (88)$$

Wir multiplizieren (324) mit beliebiger Funktion

$$\lambda_e = \lambda_e(t),$$

den sogenannten Lagrange-Multiplikatoren:

$$\lambda_e \cdot \sum_k a_{ek} \delta q_k = 0 \quad (325) \quad (89)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k,e} \lambda_e a_{ek} \delta q_k dt = 0 \quad (326) \quad (90)$$

(326) + (323) liefert

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^J \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{e=1}^L \lambda_e a_{ek} \right) \delta q_k dt = 0 \quad (327) \quad (91)$$

Wir wählen q_1, \dots, q_{J-L} als unabhängige Variablen, $\delta q_1, \dots, \delta q_{J-L}$ sind dann unabhängig, während $\delta q_{J-L+1}, \dots, \delta q_J$ durch (324) festgelegt sind.

Ziele: Bestimme die λ_e so, dass die L Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{e=1}^L \lambda_e a_{ek} = 0 \quad (328) \quad (92)$$

festgelegt, da q_k abhängig für $k = J-L+1, \dots, J$

erfüllt sind.

2.6.17
g.f. 10

18.11
komplex zykloids

Weil q_1, \dots, q_{J-L} unabhängige Koord. sind
und die $\delta q_{J-L+1}, \dots, \delta q_J$ über (324) (88)

wie
$$\sum_{k=J-L+1}^J a_{ek} \delta q_k = - \sum_{k=1}^{J-L} a_{ek} \delta q_k$$

eindeutig festgelegt sind, muss die $L \times L$ -Matrix

(a_{ek}) mit $k=J-L+1, \dots, J$
und $e=1, \dots, L$

invertierbar sein. [Wäre sie's nicht, so gäbe es
einen mehr als eine Lsg $\delta q_{J-L+1}, \dots, \delta q_J$, d.h. die
Koord. wären nicht alle unabhängig.]

\Rightarrow (322) (92) ist eindeutig lösbar nach λ_e .

Mit (328) (92) wird (327) (91) zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{J-L} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{e=1}^L \lambda_e a_{ek} \right) \delta q_k dt = 0 \quad (329) (93)$$

Weil alle δq_k unabhängig sind, schließen

wir

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{e=1}^L \lambda_e a_{ek} = 0 \quad ; \quad k=1, \dots, J-L$$

(328) (88) und (330) (94) kombinieren wir zu den

Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha Q_{\alpha k} ;$$

$k=1, \dots, G$

(331)
(95)

Das sind G Gleichungen für die $G+L$ Unbekannten $q_1, \dots, q_G, \lambda_1, \dots, \lambda_L$.

Die übrigen benötigten L Gleichungen sind die ZB. (318) bzw. (320)

Aus dem Vergleich mit (259) sehen wir: in (331)

Die Größen $Q_k^Z := \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha Q_{\alpha k}$ sind gerade die verallgemeinerten Zwangs kräfte.

Im Spezialfall holonomer ZB folgt mit (322):

$$Q_k^Z = \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha Q_{\alpha k} = \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha f_\alpha \quad (332)$$

d.h. die verallg. ZK stehen senkrecht auf der durch $\sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha f_\alpha = 0$ definierten ^{Hypers-}Fläche.

Mit (332) können wir holonome ZB einfach in L einbauen:

$$L' := L + \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha f_\alpha(q_k, t) \quad (333)$$

und (331) ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0 \quad (334)$$

3.6.22
17.6
2017

benannt: Zu den $l=1, \dots, L$ ZB gehören L ZK, und Q_k^z ist die k -te Komponente der Summe aller L ZKräfte.

Die von der l -ten ZB ausgeübte verallg.

ZK ist $Q_{zk}^z = \sum_j \vec{z}_{lj} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} = \sum_j \vec{z}_{lj} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k}$

Zerlegen wir Q_k^z nach den Basisvektoren $\frac{\partial f_l}{\partial q_k}$, so ist wegen der Eindeutigkeit der Basiszerlegung

$$Q_k^z = \sum_l \lambda_l(t) \cdot \frac{\partial f_l(q_1, \dots, q_L, t)}{\partial q_k} \quad (335) \quad (99)$$

\Rightarrow Mit den $\lambda_l(t)$ aus (333) erhalten wir die von $f_l(q_1, \dots, q_L, t)$ ausgeübten Zwangskräfte.

Beispiel: Perle auf rotierendem Draht in kartesischen Koordinaten [normalerweise würde man Polarkoord. nehmen]:

$$x = r \cos(\omega t) \quad ; \quad y = r \sin(\omega t)$$

\Rightarrow ZB

$$f(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0 \quad (336) \quad (100)$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + A (y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m \ddot{x} + A \sin(\omega t) = 0 \quad (337) \quad (101)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m \ddot{y} - A \cos(\omega t) = 0 \quad (338) \quad (102)$$