

$\Rightarrow$ 3 Gleichungen für $x(t)$, $y(t)$, $\lambda(t)$!

Zunächst: λ eliminieren

(102) (338) $\Rightarrow A = m \ddot{y} / \cos(\omega t)$ (339) (103)

(337) $\Rightarrow \ddot{x} + \dot{y} \tan(\omega t) = 0$ (340) (104)

(100) (336) $\Leftrightarrow y = x \tan(\omega t)$ (2.24)

$\Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \tan(\omega t) + x \cdot \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)}$

$\Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x} \tan(\omega t) + \dot{x} \frac{2\omega}{\cos^2(\omega t)}$

$+ x \cdot \frac{2\omega^2 \tan(\omega t)}{\cos^2(\omega t)}$ (341) (105)

Einsetzen in (340) (104):

$\ddot{x} \underbrace{(1 + \tan^2 \omega t)}_{\frac{1}{\cos^2(\omega t)}} + \dot{x} 2\omega \frac{\tan(\omega t)}{\cos^2(\omega t)} + x \cdot \frac{2\omega^2 \tan^2(\omega t)}{\cos^2(\omega t)} = 0$ (342) (106)

Ansatz: $x(t) = r(t) \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}$ (343) (107)

Rotieren eingebaut

(106) (342) $\Rightarrow \ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0$, vgl. (270) (34)

Lösung in (274), (275), (276) (38), (39), (40)

Um $\lambda(t)$ zu bestimmen, müssen wir nur einmal differenzieren:

(101) (337) $\Rightarrow \lambda(t) = - \frac{m \ddot{x}}{\sin(\omega t)}$

(106) (342) $= \frac{m}{\sin(\omega t)} [2\omega \dot{x} \cos(\omega t) + 2\omega^2 x \cdot \sin^2(\omega t)]$

(107) (343) $= 2 \cdot \omega \cdot \dot{r}(t) m$

(35) (271) $= \pm 2\omega m \sqrt{\omega^2 r^2 + C}$

Zwangskraft:

$$\vec{Z} = \lambda(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \pm 2\omega m \sqrt{\omega^2 r^2 + C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi}$$

$$= \pm 2\omega m \sqrt{\omega^2 r^2 + C} \cdot \vec{e}_\varphi$$

vgl. (277a) (141a)

(vgl. Kap 2.4, 2.5 Gredstein.)

(344)
(108)

Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen

Hängt L nicht von einer Koordinate q_j ab, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, (345) (109)

so heißt q_j zyklisch.

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (346) (110)$$

heißt der zu q_j gehörende kanonische Impuls oder

der zu q_j konjugierte Impuls.

Ist q_j zyklisch, so ist

$$\frac{dp_j}{dt} \stackrel{(346)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(345)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\Rightarrow p_j = \text{const.} \quad (347) (111)$$

p_j ist also eine Erhaltungsgröße

16.6.14
↓

17.7.07
-42-
Thema B

Beispiele:

1) kartesische Koordinaten; $L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(\vec{r})$

mit $\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$

$$\Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j =: \pi_j$$

ist erhalten. Hier kanonischer Impuls

= kinetischer Impuls $\pi_j := m \dot{x}_j$.

17.5.5.
↓ 1.6.

2) Polarkoordinaten:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) - V(\vec{r})$$

mit $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi} \\ &= m (x^2 + y^2) \cdot \dot{\phi} \\ &= L_z, \end{aligned}$$

die z-Komponente des Drehimpulses, erhalten. Wir können damit $\dot{\phi}$

eliminieren:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{m r^2 \sin^2 \theta}$$

und müssen nur noch zwei Koordinaten,
 r und θ bestimmen.

Ist $V(\vec{r})$ kugelsymmetrisch, also

$V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$, so ist φ zyklische
Koordinate für jede Wahl der
 z -Achse, also ist der jede Komponent
von $\vec{L}$ erhalten.

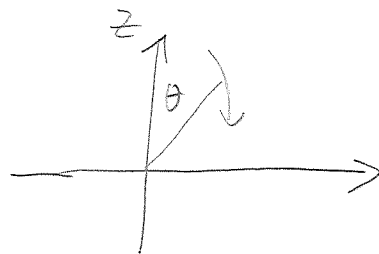
Wählen wir $\vec{e}_z \perp \vec{L}$, so ist $L_z = 0$

und $\dot{\varphi} = 0$, d.h. die Bewegung liegt wegen
in einer Ebene mit $\varphi = \text{const.}$

Dann ist:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \stackrel{(113)}{=} \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) - m r^2 \sin \theta \cdot \underbrace{\cos \theta \cdot \dot{\varphi}}_{=0}$$

und $m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$



Betrag des
worin wir den Gesamt Drehimpuls
erkennen $|\vec{L}| = m r^2 \dot{\varphi}$ für $\varphi = \text{const.}$

[Energie, (Goldst.)
[Symm. => Noether]

J24.6.2022

1.11.07
-44-
TheorB

Energie-Erhaltung

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \frac{d\dot{q}_0}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_j \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

Damit gilt für die Hamiltonfunktion
als Energiefunktion:

$$H(q_j, \dot{q}_0, t) := \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (116) \quad (352)$$

gerade

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

(117)
(353)

Hängt L nicht von t ab, so ist
 H ^{also} erhalten.

Nun ist

gilt nur für $\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_k)$,
nicht " $\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_k, t)$

kinetische

$$T = \sum_l \frac{m_l}{2} \dot{\vec{r}}_l^2 = \sum_{l,k} \frac{m_l}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_k} \right)^2 \dot{q}_k^2$$

$$\Rightarrow \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j,l} \frac{m_l}{2} \left[\sum_k \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \cdot \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad (118) \quad (354)$$

und H in (352) wird mit $L = T - V$ zu

$$H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

$$\stackrel{(354)}{=} 2T - L - \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$= T + V - \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

(119)
(355)

Hängt V nicht von $\dot{q}_j$ ab, so finden wir

$$H = T + V,$$

(120)
(356)

also die Gesamtenergie.

Noether-Theorem

Das Noether-Theorem stellt einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen her.

Betrachte die Transformation

$$\left. \begin{aligned} q_j &\rightarrow q'_j = q_j(q_k, \dot{q}_k, t, \varphi), j \geq 1 \\ t &\rightarrow t' = t_0(q_k, \dot{q}_k, t, \varphi) \end{aligned} \right\}$$

(121)
(357)

die durch einen kleinen Parameter ϕ charakterisiert ist, wobei

$$f_j(q_k, \dot{q}_k, t, 0) = q_j$$

$$f_0(q_k, \dot{q}_k, t, 0) = t$$

(122)

(358)

(121)

Ist die Wirkung S unter (357) invariant:

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} L(q_k', \dot{q}_k', t') dt' = S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt,$$

so nennt man (357) Symmetrietransformation.

Beispiele:

1. Zeittranslation:

$$t' = t + t_0$$

(123)

(359)

2. Räumliche Translation (in verallg. Koord.)

$$q_k' = q_k + q_k^0$$

(360) (124)

3. Drehung (vgl. (80) - (86)):

$$\vec{r}' = R(\vec{\phi}) \vec{r}$$

(361) (125)

Nun ist $\dot{q}'_k = \frac{dq_k}{dt'} = \frac{dq_k}{dt} \frac{dt}{dt'} \stackrel{(362)}{=} \dot{q}_k + \epsilon \dot{\psi}_k - \epsilon \dot{q}_k \cdot \dot{\psi}_0 + O(\epsilon^2)$

$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2$

$$S' = \int_{A_1}^{t_2} \left[L(q_k, \dot{q}_k, t) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \left[L(q_k + \epsilon \psi_k, \dot{q}_k + \epsilon \dot{\psi}_k, t + \epsilon \psi_0) \cdot \left(1 + \epsilon \frac{d\psi_0}{dt} \right) \right] \right]_{\epsilon=0} dt \quad (364) \quad (128)$$

↑ 24.6.72

↓ 1.7.72 Eine hinreichende Bedingung für

$S = S'$ mit beliebigem $q_k(t)$, $\dot{q}_k(t)$ ist beliebig sind, dass in (364) (128)

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[L(\dots) \left(1 + \epsilon \frac{d\psi_0}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} = 0 \quad (365) \quad (129)$$

16.6.17

ist dass.

23.6.17

$$0 = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \psi_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\dot{\psi}_k - \dot{q}_k \dot{\psi}_0) + \frac{\partial L}{\partial t} \psi_0$$

$$+ L \cdot \dot{\psi}_0$$

durch $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ersetzen

(366) (130)

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \psi_k \right) + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \dot{\psi}_0 + \psi_0 \frac{\partial L}{\partial t} \quad (367) \quad (131)$$

13 : 2 = 6,5
13 : 3 = 4,33
13 : 4 = 3,25
13 : 5 = 2,6
13 : 6 = 2,17
13 : 7 = 1,86
13 : 8 = 1,63
13 : 9 = 1,44
13 : 10 = 1,3
13 : 11 = 1,18
13 : 12 = 1,08
13 : 13 = 1
13 : 14 = 0,93
13 : 15 = 0,87
13 : 16 = 0,81
13 : 17 = 0,76
13 : 18 = 0,72
13 : 19 = 0,68
13 : 20 = 0,65