

Wegen
$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

also
$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

kann man (367) umschreiben in (368) (132)

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \psi_k + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \psi_0 \right]$$
 (369) (133)

Damit ist die Noether-Ladung

$$Q := \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \psi_k + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \psi_0$$
 (370) (134)

eine Erhaltungsgröße.

Anwendungen:

1. Homogenität in der Zeit bzw. Zeitunabh.
 $t \rightarrow t + \epsilon$; potential

(134) $\psi_k = 0$; $\psi_0 = 1$

$\Rightarrow Q = L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = -H$ (116) (352)

1. VI.

$\Rightarrow$ Energieerhaltung

18.VI.

1. VI 07
-50-
Thema

2. Homogenität ~~im~~ des Raumes, räumliche konstantes Potential

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \cdot \vec{e}_i$$

↑ Einheitsvektor

$$\Rightarrow \psi_k = \dots \delta_{ik}$$

$$\psi_0 = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i = \pi_i$$

(135)

(371)

$\Rightarrow$ Impulserhaltung

3. Rotationsinv. Potentiale, Isotropie des Raumes

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \cdot \vec{n} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \psi_k = \sum_{l,m} \epsilon_{k l m} n_l x_m$$

$$\psi_0 = 0$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{m,l,k=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \cdot \epsilon_{k l m} n_l x_m$$

(135)

(371)

$$= \sum_{m,l,k=1}^3 \epsilon_{k l m} \pi_k n_l x_m$$

$$= \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{n} \cdot \vec{L}$$

(137)

(373)

$\Rightarrow$ Komponente von $\vec{L}$ in $\vec{n}$ -Richtung ist erhalten

Erweitertes Noether-Theorem

(129) 365 ist eine hinreichende Bedingung
für $S' = S'$. (365) (129) bedeutet, dass

$$L(q_k', \dot{q}_k', t') dt' = L(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

(374)
(138)

ist.

Man kann (129) 365 abschwächen zu

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[L(q_k + \varepsilon \psi_k, \dot{q}_k + \varepsilon \dot{\psi}_k - \varepsilon \dot{q}_k \dot{\psi}_0, t + \varepsilon \psi_0) \cdot \right.$$

$$\left. \left(1 + \varepsilon \frac{d\psi_0}{dt} \right) \right] \bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} \underbrace{F(q_k, t)}_{\text{beliebige Funktion}}$$

(139)
(375)

Äquivalent: $L(q_k', \dot{q}_k', t') dt' = L(q_k, \dot{q}_k, t) dt + \varepsilon dF$

Mit (375) (139) wird (364) (128) zu

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_k, t) dt = S + F(q_k, t_2) - F(q_k, t_1)$$

(376) (140)

Die Noether-Ladung Q ändert sich
dann einfach zu

$$Q = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \psi_k + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \psi_0 - F$$

(141)
(377)

$\Rightarrow$ Erweitertes Noether-Theorem:

"Transformiert sich Ldtb zgl. (357) wie

$$L(q'_k, \dot{q}'_k, t') dt' = \left[L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{dF(q_k, t)}{dt} \right] dt,$$

so ist die Noether-Ladung Q in (377)

erhalten:

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

(377) gilt auch, wenn $F = F(\dot{q}_k, q_k, t)$, dann auch $\delta q_k(t_k) = 0$ notwendig.

Wichtiges Beispiel:

(Unfin.) Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r}_k &\rightarrow \vec{r}'_k = \vec{r}_k + \varepsilon \cdot \vec{v} \cdot t & \text{mit } |\vec{v}| = 1, \\ t &\rightarrow t' = t & k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\vec{\psi} = \vec{v} \cdot t,$$

$$\psi_0 = 0$$

1.7-22

1.8.7.22 Mit

$$L = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \dot{\vec{r}}_k^2 - \sum_{i \neq j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$= \vec{r}'_i - \vec{r}'_j$ invariant

findet man

$$L(\vec{r}'_k, \dot{\vec{r}}'_k, t) = L(\vec{r}_k + \varepsilon \vec{v} t, \dot{\vec{r}}_k + \varepsilon \vec{v}, t)$$

und $\frac{d}{d\varepsilon} L(\underbrace{\vec{r}_k + \varepsilon \vec{v} t}_{\text{trägt nicht bei}}, \underbrace{\dot{\vec{r}}_k + \varepsilon \vec{v}}_{\uparrow}, t) = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{v}$

kommt
→ D.h. $F = \left(\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \right) \vec{v} = M \cdot \vec{r}_S \vec{v}$
↳ Schwerpunktsbleibend

Noether-Ldg.:

$Q \stackrel{(377)}{=} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left[\dot{x}_k \cdot \hat{v}_x + \dot{y}_k \cdot \hat{v}_y + \dot{z}_k \cdot \hat{v}_z \right] \cdot t$
 $- M \cdot \vec{r}_S \cdot \vec{v}$

$= \sum_{k=1}^N m_k \cdot \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{v} t - M \vec{r}_S \vec{v}$

kommt
→ 23.6. $\uparrow$
30.6. $\downarrow$
 $= (\vec{p} \cdot t = M \vec{r}_S) \vec{v} = \text{Erhaltungsgröße}$ (145) (381)
aus Schwerpunktsbleibend (179) κ_{Root}

Wegen der Translationsinvarianz von L ist $\vec{p} = \text{const}$ und $Q = -\vec{p} \cdot \vec{v}$,
d.h. Translationsinvarianz und Invarianz bzgl. (378) führen auf dieselbe Erhaltungsgröße.

Summenkonvention:

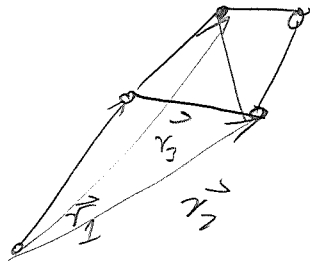
Oft $\sum_i a_i b_i \rightarrow a_i b_i$,

d.h. Summation über wiederholte Indizes ist impliziert [=> ü-Blatt]

2. Starre Körper und Kreisel

7.11.07
-54
Theo B

Körper aus N Massenpunkten:



$$\text{starr} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{fest}$$

Freiheitsgrade: • Translation des Schwerpunktes
• Rotation

Gesucht:

$\vec{L}$ = Drehimpuls zur Rotation um Achse $\vec{\omega}$:

Raumfestes Bezugssystem = Inertialsystem Σ_{Raum}
Körperfestes " = rotierendes Bezugss.
 Σ_{rot}

NOT

(118)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}_j = \frac{d}{dt} \vec{r}_j' + \vec{\omega} \times \vec{r}_j'$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r}_j' \quad \text{denn } \vec{r}_j' = \text{const. in } \Sigma_{\text{rot}}$$

[Für den mitrotierenden Beobachter ist jeder Punkt in Ruhe.] [Wichtig: (382) - (402) gelten nur, wenn die Achse $\vec{\omega}$ durch den Koordinatenursprung geht!]

In Σ_{Raum} :

$$\vec{L} = \sum_j m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j) = \sum_j m_j [\vec{r}_j \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j)]$$

(147)

(383)

Mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

wird aus (383):

$$\vec{L} = \sum_j m_j \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}_j^2 - \vec{r}_j (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_j) \right]$$

$$\Rightarrow L_k = \left[\sum_j m_j \vec{r}_j^2 \cdot \delta_{ke} - \sum_j m_j \cdot r_{jk} r_{je} \right] \omega_e$$

(kl)-Element einer Matrix Θ

$$\Theta_{ke} := \sum_j m_j \left[\vec{r}_j^2 \cdot \delta_{ke} - r_{jk} r_{je} \right]$$

heißt Trägheitstensor, und

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

Ein Tensor n-ter Stufe $T_{j_1 \dots j_n}$ ist ein

Objekt mit n Indizes $j_1, \dots, j_n$, $1 \leq j_k \leq 3$,
das sich unter einer Drehung oder
Raumspiegelung

$$\vec{r}' = R \cdot \vec{r} \quad ; \quad R^T R = \mathbb{1}$$

des Koordinatensystems wie

$$T'_{j'_1 \dots j'_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} R_{j'_1 j_1} \dots R_{j'_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

(389)
(153)

transformiert.

Tensor 0.-ter Stufe = Skalar: $T' = T$

" 1.-er " = Vektor: $T'_{j'} = R_{j'j} T_j$

$$\text{bzw. } \vec{T}' = R \cdot \vec{T}$$

θ in (386) transformiert sich wie

$$\theta'_{k'l'} := \sum_j m_j \left[\vec{\tau}_j^2 \delta_{k'l'} - \tau'_{jk} \tau'_{jl} \right]$$

$$= \sum_j m_j \left[\vec{\tau}_j^2 \delta_{k'l'} - R_{k'k} \tau_{jk} R_{l'l} \tau_{jl} \right] \quad (390)$$

Nun ist

$$\delta_{k'l'} = [R R^T]_{k'l'} = \sum_k R_{k'k} R_{l'k}$$

$$= \sum_{k,l} R_{k'k} R_{l'l} \delta_{kl}$$

Und

(390)

wird zu

$$\theta'_{k'l'} = \sum_{k,l} R_{k'k} R_{l'l} \theta_{kl}$$

$\Rightarrow \theta$ ist Tensor zweiter Stufe

(392)
(156)

(391)
(155)

Mit $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$

erhalten wir in

$$\Theta_{\vec{n}} = \vec{n}^T \Theta \vec{n}$$

das Trägheitsmoment zur Drehung um die Achse $\vec{n}$, und

$$T = \frac{1}{2} \Theta_{\vec{n}} \cdot \omega^2$$

↑
skalar.

806.1
7.7.1

(156)
(392) bedeutet

$$\Theta' = R^T \Theta R$$

Θ ist symmetrische Matrix

$\Rightarrow$ Es gibt ein R in (397), so dass

Θ' diagonal ist:

$$\Theta' = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ heißen Hauptträgheitsmomente.

Die Transf. (397), die zu (398) führt,