

heißt Hauptachsen transformierte

⇒ Wähle Koordsyst. in Σ_{rot} so, dass Θ diagonal ist.

[$\vec{\omega}$ ist Axialvektor, Θ Tensor 2.-Stufe,

T in (395) also skalar.]

$$T' = T \stackrel{(395)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Theta_j \omega_j^2 \quad \text{mit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (399) \\ (163) \end{matrix}$$

Drehmoment $\vec{M}$ (siehe (172) (173)):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (173) \text{ Rot}$$

↑ Im raumfesten Bezugssystem Σ

↑ 8.7.77

↓ 8.7.77: Nun ist

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\Sigma_{Raum}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\Sigma_{rot}} + \vec{\omega} \times \quad (119) \text{ Rot}$$

so dass im rotierenden Bezugssystem (164)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M} \quad (\text{in } \Sigma_{rot}), \quad \begin{matrix} (151) \\ (162) \end{matrix} \quad \begin{matrix} (400) \\ (164) \end{matrix}$$

ist. Mit (387) und (398) ist die j -te Komponente von (400):

$$\Theta_j \frac{d\omega_j}{dt} + \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \omega_k \cdot \Theta_l \omega_l = M_j \quad \begin{matrix} (165) \\ (401) \end{matrix}$$

$$j=1: \quad \theta_1 \dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$j=2: \quad \theta_2 \dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 = M_2$$

$$j=3: \quad \theta_3 \dot{\omega}_3 + (\theta_2 - \theta_1) \omega_2 \omega_1 = M_3$$

402

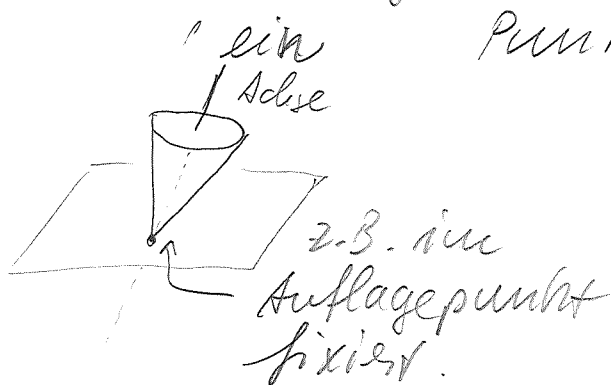
166

Dies sind die Eulerschen
Bewegungsgleichungen des
starren Körpers.

↑ 7. VI.
↓ 5. VI.

Einen rotierenden starren Körper bezeichnet man ~~als~~ auch als Kreisel. Gelegentlich ist ^{i.d. Lit.} der Begriff „Kreisel“ auf den Fall eingeschränkt, dass

ein Punkt der Achse fixiert ist.



Gleichung (395) beschreibt im $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ -Raum für $T = \text{const.}$ ein Ellipsoid, das sog. Trägheitsellipsoid.

Sind zwei Hauptträgheitsmomente θ_i gleich, so heißt der Kreisel symmetrisch.

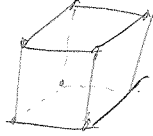
D.B.d.T.: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ für symm. Kreisel

$\theta_3 < \theta$: Trägheibellipsoid ist oblat
(= abgeplattet im Vergleich zur Kugel)

$\theta_3 > \theta$: Trägheibe. ist prolat
(= verlängert.)

Für

Bei $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ spricht man von einem Kugelkreisel, für den jede beliebige Achse Hauptachse ist.

Bsp.  Würfel.

Anwendung von (166): Stabilität der Drehungen um die Hauptachsen im kräftefreien Fall (also $\vec{M} = 0$):

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \text{const.}$ ist eine Lösung zu (166)

Jetzt stören wir die Bewegung etwas und finden eine neue Achse $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ mit $\omega_{1,2} \ll \omega_3$. (166) entwickeln wir in $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_3}$:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \quad (\varepsilon_{12}^2) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (167) \\ (168) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ zur Ordnung ε_{j2} ist $w_3 = \text{const.}$ und (403)

$$w_2 = \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_3} \frac{\dot{w}_1}{w_3}$$

(404)
(168)

$$\Rightarrow \ddot{w}_2 = \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_3} \frac{\ddot{w}_1}{w_3}$$

und $\frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_2 - \theta_3} \frac{\ddot{w}_1}{w_3} + (\theta_1 - \theta_3) \cdot w_1 \cdot w_3 = 0$

$$\Rightarrow \ddot{w}_1 + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3)}{\theta_1 \theta_2} w_3^2 \cdot w_1 = 0$$

(169)
(405)

Für $(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3) > 0$ ist dies eine Schwingungs-Differentialgleichung mit Lösung

$$w_1 = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$$

$$\text{mit } \Omega^2 = \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3)}{\theta_1 \theta_2} w_3^2$$

(170)
(406)

und w_2 folgt aus (404) (168)

Für $(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3) < 0$ hat (405) die Lösung

(169)

$$w_1 = A e^{\gamma t} + B e^{-\gamma t}$$

(171)
(407)

$$\text{mit } \gamma^2 = \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_2)}{\theta_1 \theta_2} w_3^2$$

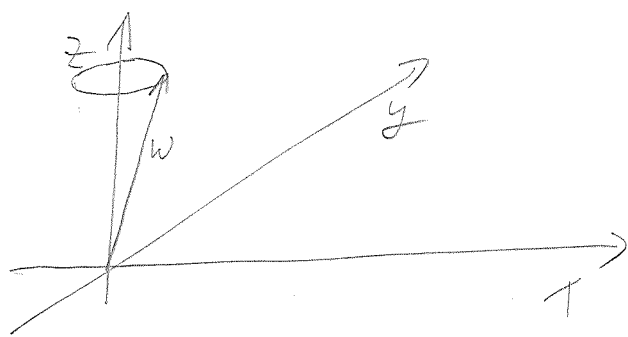
D.h. bei Rotation um die Hauptachse mit dem kleinsten θ_i (also $\theta_3 < \theta_1, \theta_2$) oder mit dem größten θ_i (also $\theta_3 > \theta_1, \theta_2$)

finden wir die stabile Lösung (406) (170)

bei der die gestörte Lösung mit kleiner Amplitude um die ungestörte Lösung präzisiert:

$$\left. \begin{aligned} w_1(t) &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ w_2(t) &\stackrel{(404)}{=} A' \cos \omega t + B' \sin \omega t \end{aligned} \right\} (408) (172)$$

mit $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \omega \cdot \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_3} \cdot \frac{1}{\omega_3} = \sqrt{\frac{\theta_1 (\theta_1 - \theta_3)}{\theta_2 (\theta_2 - \theta_3)}}$



(170) (408) beschreibt Ellipse parallel zur x-y-Ebene.

Die Rotation um die Achse zum mittleren θ_i ist instabil: $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$ oder $\theta_2 < \theta_3 < \theta_1$

gehört zur Lösung (407) (171)

Ist $\theta_3 = \theta_1$ aber $\theta_3 = \theta_2$, also $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ ist $w_1(t) = w_1(0) \cdot t$ und $w_2 = \cos$ bzw $w_2(t) = w_2(0) \cdot t$ und $w_1 = \cos$

die Lösung also auch instabil.

für $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ ist jede Lösung stabil.

[Streichholzschachtel hochwerfen mit Drehung um Kante. Satellit in Drehung versetzen.]

Kräfte freier symmetrischer Kreisel

[1. Thema mit Bezug zur Meteorologie und Geophysik].

$\theta_1 = \theta_2 = \theta$; d.h. z-Achse ist Symmetrieachse.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \theta \dot{w}_1 + (\theta_3 - \theta) w_2 w_3 &= 0 \\ \theta \dot{w}_2 + (\theta - \theta_3) w_1 w_3 &= 0 \\ \theta_3 \dot{w}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (409a) & (173a) \\ (409b) & (173b) \\ (409c) & (173c) \end{matrix}$$

$\Rightarrow w_3 = \text{const.}$

(409a) und (409b) kann man elegant zusammenfassen, wenn man

$$W = w_1 + i w_2$$

einführt:

$$\theta \cdot \dot{W} + (\theta - \theta_3) \cdot w_3 \cdot \underbrace{i W}_{-w_2 + i w_1} = 0,$$

denn $\text{Re}((410)) = (409a)$, $\text{Im}((410)) = (409b)$.

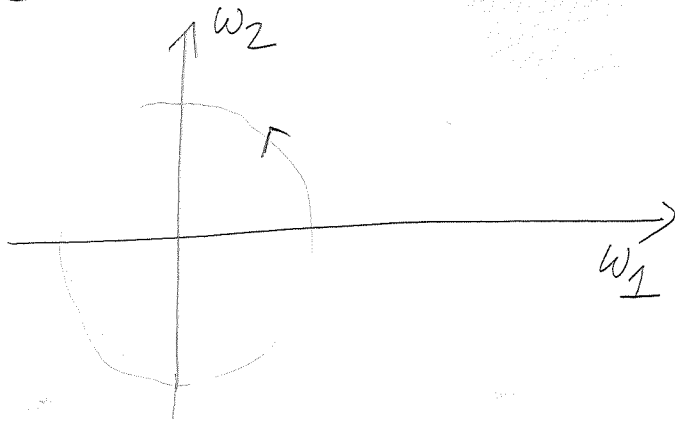
Lösung von (410):

$$W(t) = A \cdot e^{i \Omega t}$$

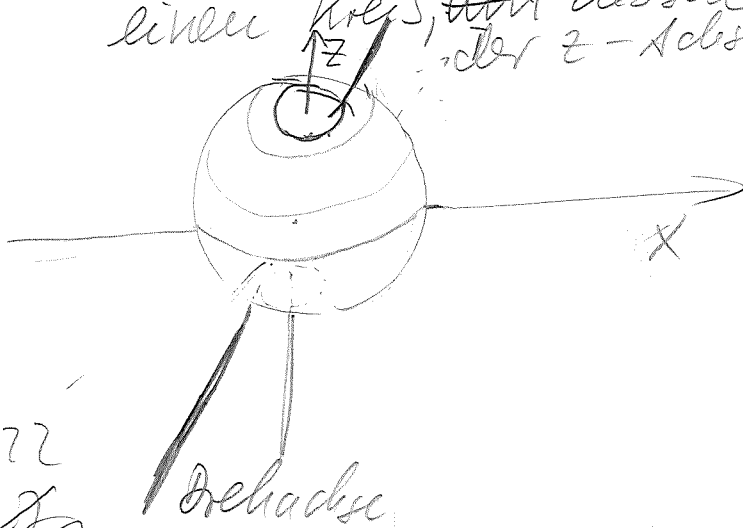
mit $\Omega = \frac{\theta_3 - \theta}{\theta} w_3$

(175)
(411)

der Achse
④① bedeutet Präzession in der (x, y) -Ebene,



der Durchstoßpunkt der Achse durch eine raumfeste Kugeloberfläche beschreibt einen Kreis, ~~um~~ dessen Mittelpunkt ~~ab~~ auf der z -Achse liegt ($\hat{=}$ Breitenkreis).



14.7.72



14.7.72

21.7.72

Die Erde ist ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid mit $\theta_3 > \theta_1 = \theta_2 = \theta$ und

$$\frac{\theta_3 - \theta}{\theta} = 0,0033$$

④①

$\Rightarrow$

$$\Omega = \frac{\omega_3}{300}$$

Mit $\omega_3 = \frac{2\pi}{1 \text{ Tag}}$ ist die Präzessions-

periode der Erde also etwa 300 Tage.

15. V. 05
-65-
Peris

Man beobachtet eine Amplitude der Präzession von ^{ca.} 4,5 m an den Polen.
und eine Periode von 427 Tagen.

Grund: Die Erde ist nicht starr, sondern ungefähr so elastisch wie Stahl.

Die Präzessionsamplitude ist schwach, weil sich die Massenverteilung auf der Erde ständig verschiebt, z.B. durch atmosphärische Bewegungen.

15.6

22.6.

Für kontinuierliche Massenverteilungen mit Dichte $\rho(\vec{r})$ wird Θ_{ke} in kg m^2 zu

$$\Theta_{ke} = \int_V \rho(\vec{r}) [\vec{r}^2 \delta_{ke} - x_k x_e] dx_1 dx_2 dx_3$$

412

176

Steiner'scher Satz:

Ist $\Theta_{S\vec{n}}$ das Trägheitsmoment für eine Achse durch den Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment um eine parallele Achse gleich

$$\Theta_{\vec{n}} = \Theta_{S\vec{n}} + M \cdot a^2,$$

413

177

wobei M die Masse und a der Abstand zw. den Achsen ist.

Beweis Der Koordinatenursprung O
 sei der Schwerpunkt.
 Dann ist (mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$)

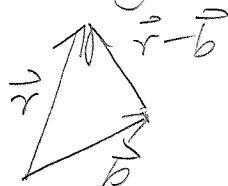
$$\int_V \rho(\vec{r}) \cdot x_k = 0 \quad (414) \quad (178)$$

$$[= M \cdot x_{Sk} = 0]$$

Trägheitstensor im Schwerpunktsystem:

$$\theta_{s,ke} = \int_V \rho(\vec{r}) [\vec{r}^2 \delta_{ke} - x_k x_e] d^3\vec{r} \quad (412) \quad (176) \quad (415) \quad (179)$$

Trägheitstensor in Bezug auf ~~den~~
 den Punkt $\vec{b}$:



$$\theta_{ke} = \int_V \rho(\vec{r}) [(\vec{r} - \vec{b})^2 \delta_{ke} - (x_k - b_k)(x_e - b_e)] d^3\vec{r}$$

$$= \theta_{s,ke} + \int_V \rho(\vec{r}) [\vec{b}^2 \delta_{ke} - b_k b_e] d^3\vec{r},$$

da die linearen Terme
 verschwinden wegen (414) (178)

$$\Rightarrow \theta_{ke} = \theta_{s,ke} + M \cdot [\vec{b}^2 \delta_{ke} - b_k b_e] \quad (416) \quad (180)$$

Luxusversion des Steiner'schen
 Satzes.

$$\theta_{\vec{n}} = \vec{n}^T \theta \vec{n} = \vec{n}^T \theta_s \vec{n} + M [\vec{b}^2 - \underbrace{(\vec{n} \vec{b})^2}_{\text{Projektion von } \vec{b} \text{ auf } \vec{n}}]$$

$$= \theta_{s\vec{n}} + M a^2 \quad \# \quad \#$$