

3. Hamilton'sche Mechanik und kanonische Transformationen

21.11.07
-68-
Thema B

Erinnerung:

Hamilton-Funktion

$$H = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (352) \quad (116)$$

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (353) \quad (117)$$

d.h. H ist erhalten, sofern $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Hängt die Transformation

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_k)$$

nicht von t ab, so ist

$$H = T + V = \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \quad (356) \quad (120)$$

gleich der Gesamtenergie.

[Akademische Situation: $\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_k, t)$. Und $\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const.}$, aber $H \neq \text{Energie}$]

Idee: Eliminiere $\dot{q}_j$ zugunsten

von

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (346) \quad (110)$$

[kanon. Impuls.]

Bspl.: kartesische Koord:

$$T = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_j \frac{\vec{\pi}_j^2}{2m_j}$$

(417) (181)

$[\vec{\pi}_j = \vec{p}_j = \text{kinetischer Impuls}]$.

Mit $\textcircled{346}$ hängt die Hamilton-Funktion

21. VI 07
69
TheoB

$$H(p_j, q_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \textcircled{418} \quad \textcircled{182}$$

von ^{den} $2N$ Koordinaten p_j, q_j ab.

Wir ignorieren zunächst $\textcircled{346}$ und betrachten $\textcircled{418}$ als Funktion von $p_j, q_j, \dot{q}_j$ und t :

$$dH = \sum_j \left[\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Setzen wir jetzt $\textcircled{346}$ ein, so heben sich die Terme mit $d\dot{q}_j$ weg:

$$dH = \sum_j \left[\dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \textcircled{419} \quad \textcircled{183}$$

wobei $\dot{q}_j$ in L als Funktion von p_j, q_j zu betrachten ist.

Wegen $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{\textcircled{346}}{=} \dot{p}_j$ ist

$$dH \stackrel{\textcircled{419} \textcircled{183}}{=} \sum_j \left[\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad \textcircled{420} \quad \textcircled{184}$$

also

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\textcircled{421} \quad \textcircled{185}$$

$$\textcircled{422} \quad \textcircled{186}$$

(185)

21. VI 07
- 70
Klaus B

(421) sind die Hamilton'sche
Bewegungsgleichungen.

Es sind $2N$ DGLen 1. Ordnung
anstelle der N DGLen 2. Ordnung
des Lagrange-Formalismus!

Lösungsverfahren

1. L aufstellen

2. $p_{\dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ berechnen

3. H aus (418) berechnen

4. (421) lösen $\Rightarrow q_{\dot{q}}(t), p_{\dot{q}}(t)$

Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale
und zeitunabhängige Transformationen

$\vec{T}_E = \vec{T}_E(q_{\dot{q}})$ sind die Schritte 2. und

3. einfach $p_{\dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ und $H = T + V$.

[Für die üblichen Koord. (Kugel-), (Zylinder-) ~~da~~ rechnet
man ein-für-alles Mal $p_{\dot{q}}$ aus!]

Der Hamilton-Formalismus ist dann
von Vorteil, wenn es Erhaltungsgrößen
gibt (H und zyklische Koordinaten).

[H ist zentrales Objekt der AM.]

Bspl: Bewegung im Zentralpotential:

$$H = T + V(r)$$

Bewegung findet in einer Ebene statt,
ebene Polarkoord r, φ :

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Zwei kanonische Impulse:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} (= L_z) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (187) \\ 423 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow H = H(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} + V(r) \quad \begin{matrix} (188) \\ 424 \end{matrix}$$

und die BGL (421) ergeben

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2} \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{zyklische K.} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (189) \\ 425 \end{matrix}$$

Unter Verwendung von $H = \text{const}$, $p_\phi = \text{const}$.

kann man aus den ersten drei Gleichungen
z.B. die Bahnkurve $\phi(r)$ aus (12) (neu!)
ausrechnen.

21.7

28+

Wichtig: Hamilton-Funktion eines
geladenen Teilchens im $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld:
(in kartes. Koord.)

Aus
$$L = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - q \Phi + q \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \quad (292) \quad (56)$$

folgt:

$$\vec{p} = m \dot{\vec{r}} + q \cdot \vec{A} \quad (426) \quad (190)$$

$$H \stackrel{(418)}{=} \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L$$

$$\stackrel{(426), (292)}{=} \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} + q \cdot \Phi$$

$$= T + q \cdot \Phi$$

= Gesamtenergie

ausgedrückt durch $\vec{p}$ in (426):

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 + q \Phi$$

Prinzip der minimalen Kopplung:

"In Gegenwart eines magnetischen Feldes
ersetze $\vec{p}$ durch $\vec{p} - q \vec{A}$ in H ."

22.VI

Anwendung des Hamilton-Formalismus:

28. VI 07
-75
Klausur

Kleine Schwingungen

Der Nullpunkt der q_j sei so gewählt,
dass

$$V = V_{\min} \quad (q_j = 0),$$

(193)
(429)

wobei $V_{\min}$ ein lokales Minimum ist.
 V ist geschwindigkeitsunabhängig.
 $q_j = 0$ ist also Ruhelage.

Frage: Wie findet man kleine
Schwingungen um $q_0 = 0$?

[$\rightarrow$ Ingenieurwissenschaften: Frequenz $\rightarrow$ Resonanz]
Chemie: Molekülschwingungen. Umkehrung: Man versetzt
etwas in Schwingungen, um etwas über V zu lernen.]

Entwicklung:

$$V = V_{\min} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} v_{jk} q_j q_k + O(q_e^3)$$

mit

$$v_{jk} = v_{kj} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q_e=0}$$

(194)
(430)
(431) (195)

T quadratisch in $\dot{q}_e \Rightarrow T$ quadratisch
in $p_e = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e}$,

also

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \tilde{t}_{jk} p_j p_k$$

(432)

(196)

14.7.17 mit o.B.d.A. $\tilde{t}_{jk} = \tilde{t}_{kj}$.

21.7.17 Zunächst hängt i.a. $\tilde{t}_{jk}$ von q_e ab.

Wir suchen Lösungen mit kleinen q_e
und kleinen p_e , so dass wir in

$H = T + V$ nur die niedrigste, quadratische,
Ordnung in $p_j p_k$, $q_j q_k$ und $q_j p_k$
betrachten. Also

$$\tilde{t}_{jk} = t_{jk} + O(q_e)$$

wobei $t_{jk} = \tilde{t}_{jk}(q_e = 0)$ nicht von q_e
abhängt.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} t_{jk} p_j p_k + O(q_e p_j p_k)$$

(197)

(433)

und (unter Auslassung kubischer und höherer Terme):

$$H = T + V = \frac{1}{2} \sum_{jk} [t_{jk} p_j p_k + v_{jk} q_j q_k] \quad (198) \quad (434)$$

$$\begin{aligned} (185) \quad (421) \Rightarrow \dot{p}_n &= - \frac{\partial H}{\partial q_n} \quad (434) = - \frac{1}{2} \sum_{jk} v_{jk} \left[\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_n}}_{\delta_{jn}} q_k + q_j \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_n}}_{\delta_{kn}} \right] \end{aligned}$$

$$= - \frac{1}{2} \left[\sum_k v_{nk} q_k + \sum_j v_{jn} q_j \right]$$

$\nwarrow \nearrow$
 j in k umbenennen

$$\dot{p}_n = - \sum_k v_{nk} q_k \quad \text{wegen } v_{nk} = v_{kn}. \quad (435) \quad (199)$$

Analog:

$$(421) \Rightarrow \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad (434) = \sum_n t_{ln} p_n \quad (200) \quad (436)$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_l = \sum_n t_{ln} \dot{p}_n \quad (199) \quad (435) = - \sum_{nk} t_{ln} v_{nk} q_k \quad (437) \quad (201)$$

(437) kann man als Matrixgleichung schreiben:

$$\text{Mit } \vec{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

(438) (202)

und den $N \times N$ -Matrizen $\hat{T} = (t_{kn})$; $\hat{V} = (v_{kn})$ ist

$$\ddot{\vec{q}} = -\Omega \cdot \vec{q},$$

(439) (203)

wobei

$$\Omega = \hat{T} \cdot \hat{V}$$

(440) (204)

ist. [Ω ist nicht symmetrisch]

Der Ansatz $\vec{q} = \vec{q}_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$

(441) (205)

mit $\vec{q}_0 \in \mathbb{C}^N$ führt auf

$$-\omega^2 \cdot \vec{q}_0 \stackrel{(439)}{=} -\Omega \vec{q}_0,$$

also

$$[\Omega - \omega^2 \cdot \mathbb{1}] \vec{q}_0 = 0$$

(442) (206)

Gleichung (442) hat nur eine Lösung mit $\vec{q}_0 \neq 0$, wenn ω^2 Eigenwert von Ω ist.

Sei $\omega^2 = \lambda_j$ Eigenwert mit EV $\vec{a}_j \in \mathbb{C}^N$

$$\hat{T} \hat{V} \cdot \vec{a}_j = \lambda_j \vec{a}_j$$

443
207

Die kinetische Energie ist positiv definit,

$$T = \frac{1}{2} \vec{p}^T \cdot \hat{T} \vec{p} > 0$$

für jeden (reellen) ^{Vektor} ~~State~~ $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$,
kanonischer Impulse.

$\Rightarrow \det T \neq 0$ und die symmetrische reelle
Matrix $\hat{T}$ hat nur positive Eigenwerte.

(207)
(443) $\Rightarrow \hat{V} \cdot \vec{a}_j = \lambda_j \hat{T}^{-1} \vec{a}_j$

444 208

~~Hermitesche Konjugation für $j \rightarrow k$~~

~~$$a_k^+ \hat{V} = \lambda_k^* a_k^+ \hat{T}^{-1}$$~~

~~445~~

~~$a_k^+ (444) - (445) \cdot a_j$~~

~~$$0 = (\lambda_j - \lambda_k^*) \cdot a_k^+ \hat{T}^{-1} a_j$$~~

~~446~~

Schöner als Goldstein...

$\hat{T}$ kann man orthogonal diagonalisieren:

$$U^T \hat{T} U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \text{ mit } \lambda_j > 0$$

$$\text{und } U^T U = \mathbb{1}.$$

$$\sqrt{\hat{T}} := U \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) U^T$$

ist symmetrisch.

$$\text{und z.B. } \sqrt{\hat{T}} \cdot \sqrt{\hat{T}} = U \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots) \underbrace{U^T U}_{=\mathbb{1}} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots) U^T$$

$$= U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) U^T$$

$$= \hat{T}$$

$$\text{aber } \sqrt{\hat{T}} \hat{T}^{-1} \sqrt{\hat{T}} = \mathbb{1}$$

$$\text{Mit } \hat{V}' = \sqrt{\hat{T}} \hat{V} \sqrt{\hat{T}} \text{ und } a_j = \sqrt{\hat{T}} a_j'$$

folgt aus:

$$\hat{V} \cdot \sqrt{\hat{T}} a_j' = \lambda_j \hat{T}^{-1} \sqrt{\hat{T}} a_j'$$

$$\Rightarrow \hat{V}' a_j' = \lambda_j \sqrt{\hat{T}} \hat{T}^{-1} \sqrt{\hat{T}} a_j'$$

$$= \lambda_j a_j'$$

$\hat{V}'$ ist symmetrisch; also:

N Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $a_j'^T a_k' \propto \delta_{jk}$

und a'_j kann reell gewählt werden.

(450) bedeutet

$$a_j^T \cdot \overset{1}{T} a_k \propto \delta_{jk}$$

(451) (215)

Schließblock (vgl. (431) (195))

$\overset{1}{V}$ ist positiv definit, denn

$V = V_{\min}$ für $q_e = 0$. $\Rightarrow$ Für alle

$a \in \mathbb{R}^N$ ist (mit $a = \sqrt{T} a'$)

$$0 < a^T \overset{1}{V} a = a'^T \sqrt{T} \overset{1}{V} \sqrt{T} a'$$

$$\stackrel{(447) (211)}{=} a'^T \overset{1}{V}' a'$$

$\Rightarrow \overset{1}{V}'$ ist pos. def., also $\omega^2 = \lambda_j > 0$.

Zusammenfassung:

1) Der Ansatz (441) (205) funktioniert, es gibt N Normalschwingungen mit $\omega^2 = \lambda_j > 0$.

2) Die Eigenfrequenzen ergeben sich aus dem EW-Problem (449) (213)

3) Mit den reellen Lösungen (aus (441) (205))

$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi)$ folgt aus

(199)

(435):

28. VI 07
-80
Theob

$$\dot{p} = -\hat{V} \cdot \dot{q} = -\hat{V} \cdot \dot{q}_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \cdot \hat{V} \cdot \dot{q}_0 =: p_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

(216)

(452)

297.72
Ende
21.7.1
78.1

$\Rightarrow$ kleine Amplituden q_0 gehören zu kleinem p_0 ; der Ansatz (434) ist konsistent.

(198)

Ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden ist zu jedem Zeitpunkt t durch die Angabe von $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$ vollständig beschreibbar. Der von $\{q_1, \dots, p_N\}$ aufgespannte $\mathbb{R}^{2N}$ heißt

Phasenraum

Gibt man für $t=0$ einen Punkt $\{q_1^0, \dots, p_N^0\}$ vor, so ist $\{q_1, \dots, p_N\}$

für alle t durch die Lösung vor

(185)

(421)

eindeutig bestimmt. $\Rightarrow$ Das System beschreibt eine durch t parametrisierte Kurve im Phasenraum.

Beispiel: harm. Oszillator:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right)$$

(453) (217)

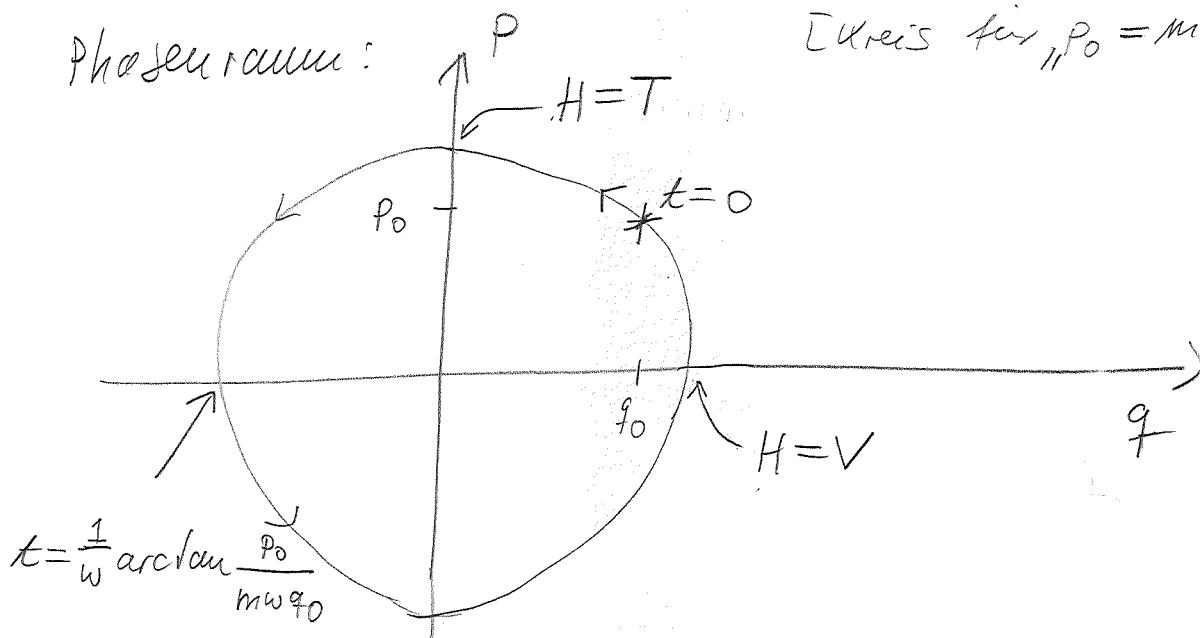
Lösung zu $(p, q)(t=0) = (p_0, q_0)$:

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t) \\ q(t) &= q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \end{aligned} \right\}$$

(454) (218)

Phasenraum:

[Kreis für „ $p_0 = m\omega q_0$ “]



↑ 29. VI
↓ 6. VII.

$\{q_1^0, \dots, p_n^0\}$ bestimmt $\{q_1(t), \dots, p_n(t)\}$

eindeutig. $\Rightarrow$ Zwei Kurven im Phasenraum können sich weder kreuzen noch berühren. Eine Kurve ist geschlossen (wie beim harm. Oszillator) oder offen.

Betrachten wir eine große Zahl mechanischer Systeme, (mit jeweils N_i Freiheitsgraden), so können wir eine Dichte $\rho(p_i, q_i, t)$ definieren:

Ist dn die Zahl der Systeme im Phasenraumvolumenelement $dq_1 dp_1 \cdots dq_N dp_N$, so ist

$$dn = \rho(p_i, q_i, t) dq_1 dp_1 \cdots dq_N dp_N.$$

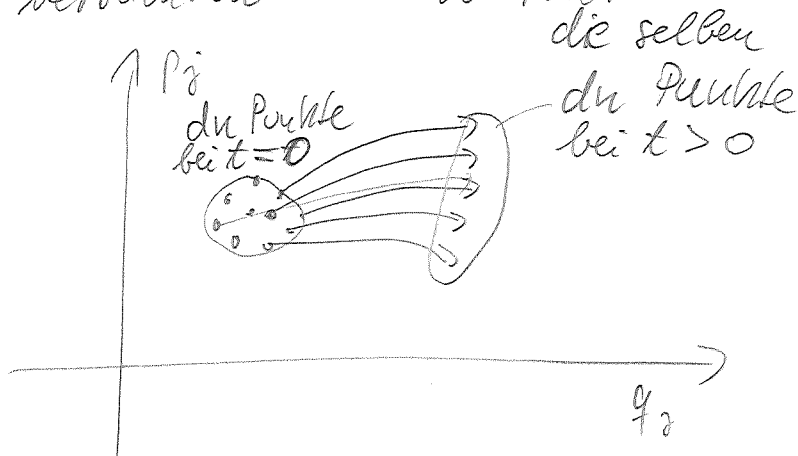
(219)

(455)

Die Betrachtung einer Dichte $\rho(p_i, q_i, t)$ führt in die statistische Mechanik.

Bei z.B. 40^{23} Gasmolekülen kann man q_i^0, p_i^0 nicht messen. Ziel der statistischen Mechanik ist es, makroskopische Größen wie Energie, Druck, Volumen mit der mikroskopischen Physik in $H(p_i, q_i)$ zu verknüpfen.

Wir betrachten die Zeitentwicklung von $\rho(p_i, q_i, t)$:



Es gilt der

Liouville'sche Satz:

5.11.07
-SS
Prob

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

(456) (220)

Beweis:

Definiere

$$\vec{v} := (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$$

Die zeitliche ^{Zahl der} Äquivalenz der Systeme im zeitlich festen Phasenraumvolumenelement w ,

$$\text{mit } dw = dp_1 \dots dp_N dq_1 \dots dq_N,$$

$$\frac{dw}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_w s dw = \int_{\partial w} s \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n} df}_{\substack{\text{Oberflächenelement} \\ \text{Teilchenfluss durch } df}}$$

Gauß'scher Satz

$$\downarrow \\ = \int_w \vec{v} (\vec{v} s) dw$$

(221)
(457)

$$\text{mit } \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_N}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_N} \right).$$

Weil w beliebig ist, folgt aus (457):

$$-\frac{\partial s}{\partial t} = \vec{v} (\vec{v} s) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial p_i} (\dot{p}_i s) + \frac{\partial}{\partial q_i} (\dot{q}_i s) \right]$$

$$= \sum_j \left[\dot{p}_j \frac{\partial S}{\partial \dot{p}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} + S \left(\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} \right) \right]$$

3.11.07
- 8.11
Mod B
(458)
(222)

Der ~~zwei~~ letzte Term in (458) verschwindet wegen (421) (185) (222)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{p}_j} \dot{p}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_j} = 0.$$

Also

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \left[\dot{p}_j \frac{\partial S}{\partial \dot{p}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{(222)}{\stackrel{(458)}}{=} 0 \quad \#$$

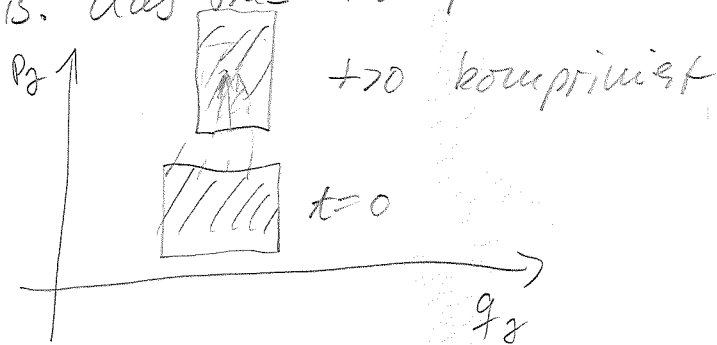
[S verhält sich wie eine inkompressible Flüssigkeit.]

Ist $S = \text{const.}$ im Phasenraum, so spricht man von stationärem (oder thermodynamischem) Gleichgewicht.

[konstante Energie vorausgesetzt ~ mikrokanon. Ensemble.]

Anwendung auf Gas aus nichtwechselwirkenden Molekülen: Makroskopisch können wir $\frac{\partial S}{\partial t}$ steuern,

z.B. das Gas komprimieren:



Kompression $\rightarrow$ weniger q_j Volumen. Wegen (456) (220) nimmt das Gas also mehr p_j -Volumen ein, es gibt mehr Moleküle mit größerem p_j^2 , das

Gas heizt sich auf.

3.12.07
-85-
17.03

Kanonische Transformationen

Wir suchen eine Transformation

$$q_j, p_j, H \rightarrow Q_j, P_j, K$$

(459)

(223)

und eine

Funktion F , so dass

$$L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dF}{dt}$$

(460)

(224)

gilt.

Mit (460) gilt das Hamilton'sche Prinzip

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L' + F(t_2) - F(t_1) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt$$

auch für $L' = P_j \dot{Q}_j - K$, so dass

$K = K(P_j, Q_j)$ die Hamilton-Funktion

zu Q_j, P_j ist. Damit gilt auch

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}.$$

Ziel: Vereinfachung von H bzw. K , z.B.

(eingespart)
um alle Koordinaten Q_j zyklisch zu machen.

Vier Möglichkeiten, F zu wählen:

$$F_1(q_j, \dot{q}_j, t), F_2(q_j, p_j, t), F_3(p_j, \dot{q}_j, t),$$

$$F_4(p_j, \dot{p}_j, t);$$

$F = F_1$: Hinreichend für (224) (460) ist wegen

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j p_j \dot{q}_j - K + \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

dass

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_j}$$

$$p_j = - \frac{\partial F_1}{\partial q_j}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

(225)
 (461)

erfüllt ist.

(461) (225) definiert eine kanonische Transforma-
 tion mit der Erzeugenden $F_1(q_j, \dot{q}_j, t)$.

$F = F_2(q_j, p_j, t)$: Analog findet man:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_j}, \quad q_j = \frac{\partial F_2}{\partial p_j}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

(226)
 (462)

$$F = F_3(p_j, q_j, t):$$

$$q_j = - \frac{\partial F_3}{\partial p_j} ; p_j = - \frac{\partial F_3}{\partial q_j}$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

} (463) (227)

$$F = F_4(p_j, p_j, t):$$

$$q_j = - \frac{\partial F_4}{\partial p_j} ; Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial p_j}$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

} (464) (228)

Beispiele:

1) $F_1(q_j, q_j) = \sum_j q_j Q_j$

(461) $\Rightarrow \begin{cases} p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j \\ p_j = - \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = - q_j \end{cases}$

D.h. die Rollen von p_j und $-q_j$ werden vertauscht.

2) $F_2(q_j, p_j, t) = \sum_j f_j(q_j, t) p_j$

(462) $\Rightarrow Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial p_j} = f_j(q_j, t)$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$\rightarrow$ normale Punkttransformation

$$3) F_1 = \frac{m}{2} \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$$

hamon. oscillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}$$

Auflösen nach q, p :

$$\left. \begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p &= \sqrt{2m\omega P} \cos Q \end{aligned} \right\}$$

und

$$K = H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P$$

$\Rightarrow H$ ist zyklisch in Q

und P ist Erhaltungsgröße,

offensichtlich

$$P = \frac{H}{\omega} = \frac{E}{\omega}$$

und

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega$$

$$\Rightarrow Q = \omega t + \varphi$$

Einsetzen in

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(\omega t + \varphi)$$

465

229

466

230

461 225

467

231

468

232

469

233

469

234

470