

4. Spezielle Relativitätstheorie

Wir betrachten zwei Inertialsysteme Σ und Σ' . Σ' darf gegen Σ verdreht und versetzt sein und darf sich gegen Σ mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen.

Das Relativitätsprinzip besagt, dass Naturgesetze in Σ und Σ' die selbe Form haben; d.h. auf absolute Zeiten, Längen, Winkel und Geschwindigkeiten kommt es nicht an.

Die Galileif. (107) erfüllt das Relativitätsprinzip. Geschwindigkeiten $\vec{u}$ und $\vec{u}'$, die in Σ bzw. Σ' gemessen werden, sind wegen (108) über

$$\vec{u}' = \vec{v} + \underbrace{R(\vec{\phi})}_{\text{Rotationsmatrix}} \cdot \vec{u} \quad (481)$$

$\uparrow$ Rotationsmatrix zum Winkel zwischen Σ und Σ' .

verknüpft. Im Experiment findet man jedoch, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem den Betrag $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hat!

übliche Notation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{oberer Index, kein Exponent!}$$

$$x^0 = c \cdot t \quad \swarrow \text{zeit}$$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \text{ heißt Vierervektor. Er lebt in der Raumzeit } \mathbb{R}^4.$$

Einsteinsche Summenkonvention:

über wiederholte Indizes wird summiert

Ziel: Finden ^{einfache} Transformation von Σ zu Σ'

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (482) \\ \mu=0,1,2,3$$

so dass das Relativitätsprinzip erfüllt ist und c invariant ist.

Die 4×4 -Matrix (L^μ_ν) in (482) definiert eine Lorentz-Transformation.

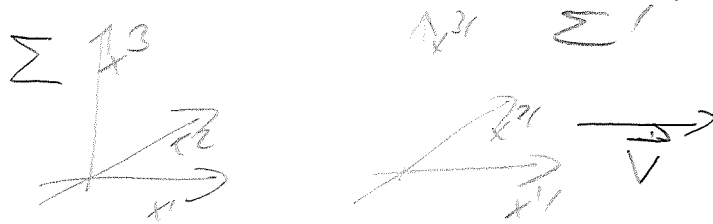
Für $L^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ ist (482) einfach eine Verschiebung des Nullpunktes der Raumzeit um $\begin{pmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$. (482) nennt man Poincaré-Transformation.

δ^μ_ν ist das Kronecker-Symbol:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Liegt keine Drehung vor, d.h.
ist $R(\vec{\phi}=0) = \mathbb{1}$, so spricht man
von einem Lorentz-Boost.

Bestimmung von L^{μ}_{ν} für agent.
Lorentz-Trf. zur Geschwindigkeit $\vec{v}$:



Der Ansatz

$$\begin{aligned} x^{0'} &= A(\underline{v})x^0 + B(\underline{v}) \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c} \\ \vec{x}' &= C(\underline{v})\vec{x} + \frac{D(\underline{v})}{v^2} \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{x}) + E(\underline{v}) \cdot \frac{x^0}{c} \vec{v} \end{aligned} \quad (483)$$

ist der allgemeinste lineare Ansatz, denn

- 1) $x^{0'}$ ist skalar bezüglich Drehungen,
kann von $\vec{v}$ also nur über
 $v=|\vec{v}|$ und $\vec{v} \cdot \vec{x}$ abhängen.
- 2) $\vec{x}'$ ist Vektor bezüglich Drehungen,
muss also von $\vec{x}$ und $\vec{v}$ aufgespannt
sein. ($\vec{x} \times \vec{v}$ ist Axialvektor!)
- 3) (483) muss linear in $x^0, \vec{x}$ sein, d.h.
der Koeffizient von $\vec{v}$ ist
proportional zu einem der Skalare x^0
und $\vec{v} \cdot \vec{x}$

Vergleich von (482) mit (483): $L^0_0 = A(v)$; $L^0_i = \frac{B(v)}{c} \cdot v^i$,
 Erste Bedingung: $L^i_j = C(v) \cdot \delta^i_j + \frac{D(v)}{v^2} v^i v_j$; $L^i_0 = \frac{E(v)}{c} \cdot v^i$,
 Σ' bewegt sich mit $\vec{v}$ gegen Σ :
 $\vec{x} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot x^0 \Leftrightarrow \vec{x}' = 0$, also
 $C(v) + D(v) + E(v) \stackrel{(483)}{=} 0$ (485)

Zweite Bedingung:

Σ bewegt sich mit $-\vec{v}$ gegen Σ' :

$$x^{\mu'} = [L(\vec{v})]^\mu_{\nu} x^{\nu}$$

$$\Rightarrow x^{\mu} = [L(-\vec{v})]^\mu_{\nu'} x^{\nu'} = [L(-\vec{v})]^\mu_{\nu} [L(\vec{v})]^\nu_{\sigma} x^{\sigma}$$

bzw.

$$L(\vec{v}) \cdot L(-\vec{v}) = \mathbb{1} \quad (486)$$

Mit (484) folgt:

$$\begin{pmatrix} A(v) & B(v) \cdot \frac{\vec{v}^T}{c} \\ E(v) \frac{\vec{v}}{c} & C(v) \mathbb{1} + D \frac{\vec{v} \vec{v}^T}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(v) - B(v) \frac{\vec{v}^T}{c} \\ -E(v) \frac{\vec{v}}{c} & C(v) \mathbb{1} + D \frac{\vec{v} \vec{v}^T}{v^2} \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\text{also } A^2 - BE \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad (487)$$

$$C^2 \mathbb{1} + (-BE \frac{v^2}{c^2} + 2CD + D^2) \frac{\vec{v} \vec{v}^T}{v^2} = \mathbb{1} \quad (488)$$

$$E \cdot (A - C - D) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = 0 \quad (489)$$

$$B (C + D - A) \frac{\vec{v}^T}{c} = 0 \quad (490)$$

(488) bedeutet:

$$d^2 = 1 \Rightarrow d = 1, \text{ denn}$$

$d = -1$ wäre Drehung um 180° in (485).

(485) bedeutet also $E = -1 - D$

und

$$(487) \Rightarrow A^2 + (1+D)B \cdot \frac{v^2}{c^2} = 1$$

$$(488) \Rightarrow B(1+D) \frac{v^2}{c^2} + 2D + D^2 = 0$$

$$(489) \Rightarrow (D+1)(A-D-1) = 0$$

$$(490) \Rightarrow B(D+1-A) = 0$$

$$\Rightarrow D+1=A$$

(491)

und (491) impliziert

$$A \left[A + B \frac{v^2}{c^2} \right] = 1$$

so dass

$$B = \frac{c^2}{v^2} \cdot \frac{1-A^2}{A}$$

$$D = A - 1$$

$$E = -1 - D = -A$$

(492)

[In Zukunft: (L_{ij}) ist Tensor bzgl. Drehungen: $L_{ij} = d_{ij} + D \frac{v_i v_j}{c^2}$]

Die Lorentz-Transformation ist also:

13. VII 0
-96-
Thema 1

$$\begin{pmatrix} L^{\mu}_{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \frac{1-A^2}{A} \cdot \frac{c \cdot \vec{v}^T}{v^2} \\ -A \frac{\vec{v}}{c} & 1 + (A-1) \frac{\vec{v} \vec{v}^T}{v^2} \end{pmatrix} \quad (493)$$

Um $A(v)$ zu bestimmen, fordern wir die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit für eine ^{ebene} Lichtwelle, die sich in Σ in Richtung $\vec{n}$ ausbreitet, wobei $\vec{v}^T \cdot \vec{n} = 0$ sei:

$$\vec{x} = \vec{n} \cdot ct = \vec{n} \cdot x^0 \quad ; \quad |\vec{n}| = 1 \quad (494)$$

In Σ' ist dann

$$\vec{x}' = \vec{n}' \cdot x^{0'} \quad \text{mit} \quad |\vec{n}'| = 1,$$

also $x^{0'2} = x^{012} \quad (495)$

(493) und (494) bedeuten:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix} \cdot x^0$$

$$\Rightarrow x^{0'} = A \cdot x^0 \quad \text{und} \quad \vec{x}' = \left[-A \frac{\vec{v}}{c} + \vec{n} \right] x^0$$

$$\stackrel{(495)}{\Rightarrow} A^2 \cdot x^{02} = x^{0'2} = \left[-A \frac{\vec{v}}{c} + \vec{n} \right]^2 x^{02} \quad (496)$$

$$\Rightarrow A^2 = A^2 \frac{v^2}{c^2} + 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (497)$$

↑ 13. VII
↓ 16. VII. 0
Die Lösung $A = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ist ausgeschlossen,

wenn man fordert, dass aus $x^0 > 0$ auch $x^{0'} > 0$ folgt, also die Zeit in beiden Bezugssystemen in die Zukunft läuft.

Statt A schreibt man meist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (498)$$

was man Gamma-Faktor oder

Boost-Faktor nennt. $\gamma \geq 1$.

(493) wird unser Lorentz-Boost zu:

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \frac{\vec{v}}{c}^T \\ -\gamma \frac{\vec{v}}{c} & \mathbb{1} + (\gamma - 1) \cdot \frac{\vec{v} \vec{v}^T}{v^2} \end{pmatrix} \quad (499)$$

Die eigentlichen (oder orthochron-orthochron) Lorentztransformationen bestehen aus Boost $L(\vec{v}; 0) := L(\vec{v})$ und Drehungen

$$L(0, \vec{\varphi}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\vec{\varphi}) \end{pmatrix}, \quad (500)$$

wobei $R(\vec{\varphi})$ die in (80) definierte Drehmatrix ist. Mit (499) und (500) bestätigt man leicht:

$$L(\vec{v}, \vec{\varphi}) := L(0, \vec{\varphi}) L(\vec{v}, 0) = L(R\vec{v}, 0) L(0, \vec{\varphi})$$

(501)

$\left. \begin{matrix} L(\vec{v}, 0) \\ L(0, \vec{\varphi}) \end{matrix} \right\}$ ist $\left\{ \begin{matrix} \text{symmetrisch} \\ \text{unitär} \end{matrix} \right\}$, aber nicht $\left\{ \begin{matrix} \text{unitär} \\ \text{symmetrisch} \end{matrix} \right\}$

Die Matrix

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(502)

heißt Minkowski-Metrik.

Die Lorentz-Transformation ⁽⁵⁰¹⁾ erfüllt

$$L^T g L = g, \quad (503)$$

wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt.

Wir definieren das (Pseudo-)Skalarprodukt

$$x \cdot y := x^T g y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \quad (504)$$

Aus (503) folgt mit $x' = L \cdot x$; $y' = L \cdot y$:

$$x' \cdot y' = x'^T g y' = x^T L^T g L y \quad (504)$$

$$= x^T g y = x \cdot y \quad (505)$$

(504) ist also Lorentz-invariant.

Insbesondere ist

$$x' \cdot x' = x'^2 = x^2 = x \cdot x \quad (506)$$

speziell: Boost in x^1 Richtung, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$:

13. VII. 21
-100-
VUB

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(507)

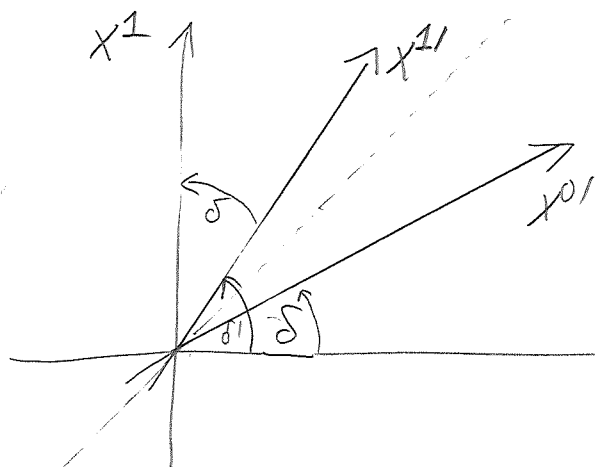
Darstellung im Minkowski-Diagramm:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \frac{v}{c}x^1)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \frac{v}{c}x^0)$$

} (508)

Die durch $x^{0'} = 0$ definierte $x^{1'}$ -Achse hat die Steigung $\frac{c}{v}$. Die $x^{0'}$ -Achse hat " " $\frac{v}{c}$:



$$\tan \delta' = \frac{c}{v}$$

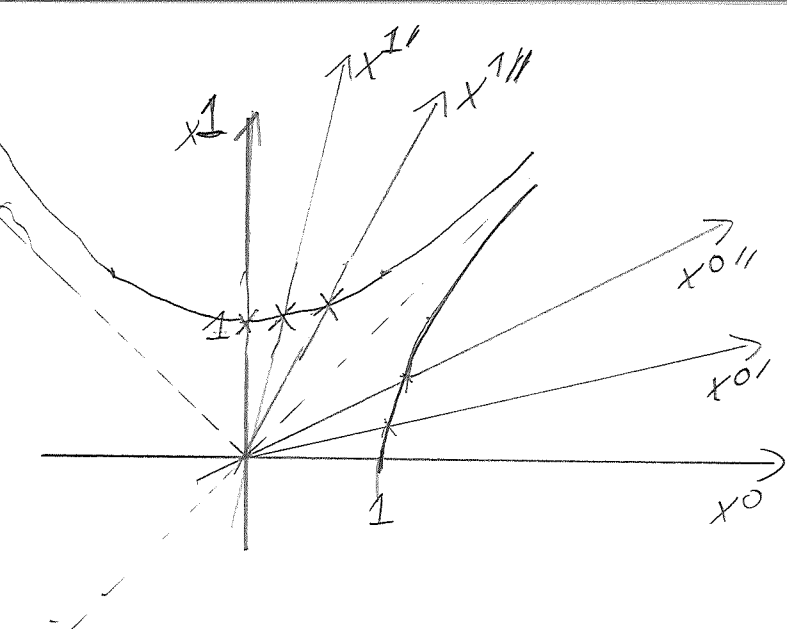
$$\tan \delta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \delta' = 90^\circ - \delta$$

$\Rightarrow$ Achsen symmetrisch zur Winkelhalbierenden

Zur Lage der $(0,1)$ - und $(1,0)$ - Punkte:

Betrachte viele Bezugssysteme:



Die Hyperbeln gehören zu den Gleichungen

⑤ $-x^2 = x^{12} - x^{02} = 1$ (509)

$x^2 = x^{02} - x^{12} = 1$ (510)

Wegen (506) ist

$$x^{0'2} - x^{1'2} = x^{02} - x^{12}$$

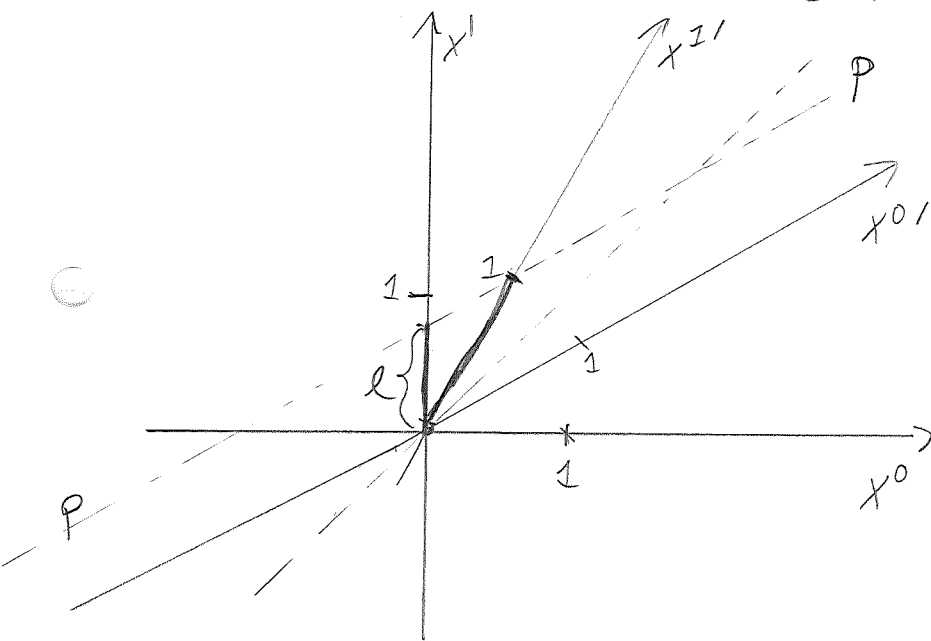
Die (0,1)-Punkte der Bezugssysteme

⑤ erfüllen $x^2 = x'^2 = x''^2 = -1$, liegen also auf der Hyperbel (509). Analog liegen die (1,0)-Punkte auf der Hyperbel (510).

Aus der Zeichnung sieht man sofort: Zwei gleichzeitige Ereignisse $(x^0, x^1), (x^0, y^1)$ in Σ finden zu verschiedenen Zeiten $x^{0'}, y^{0'}$ in Σ' statt

Längenkontraktion

Ein Meterstab ruhe in Σ' . Seine Enden seien bei $x^{1'}=0$ und $x^{1'}=1$, sie folgen also der $x^{0'}$ -Achse und der Parallele P zur $x^{0'}$ -Achse.



Die Länge des Meterstabs in Σ wird gemessen, indem die Positionen von Anfang und Ende zur Zeit $x^0=0$

bestimmt werden. D. h. sie ist durch den Schnittpunkt von P mit der x^1 -Achse, $(0, l)$ gegeben. Aus der Zeichnung findet man $l < 1$, die Längenkontraktion

(508) liefert mit $(x^0, x^1) = (0, l)$ und $x^{1'}=1$ sofort

$$1 = \gamma \cdot l = l = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (511)$$

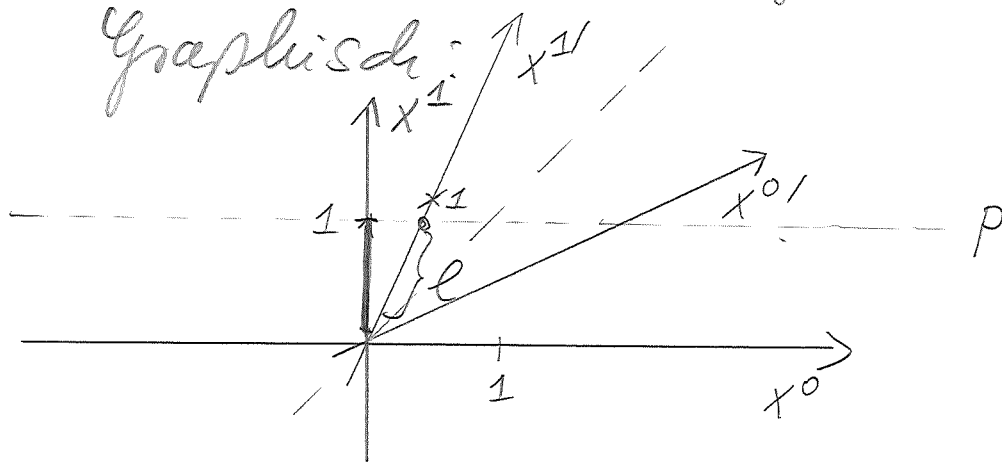
für die kontrahierte Länge.

Für einen in Σ ruhenden Meterstab (Endpunkt bei $x^1=0$) findet man für die Längenmessung in Σ' bei $x^{0'}=0$ aus (508):

$$l = x^{1'} = \gamma \cdot - \gamma \cdot \frac{v}{c} x^0 = \gamma - \gamma \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ = \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad , \quad (512)$$

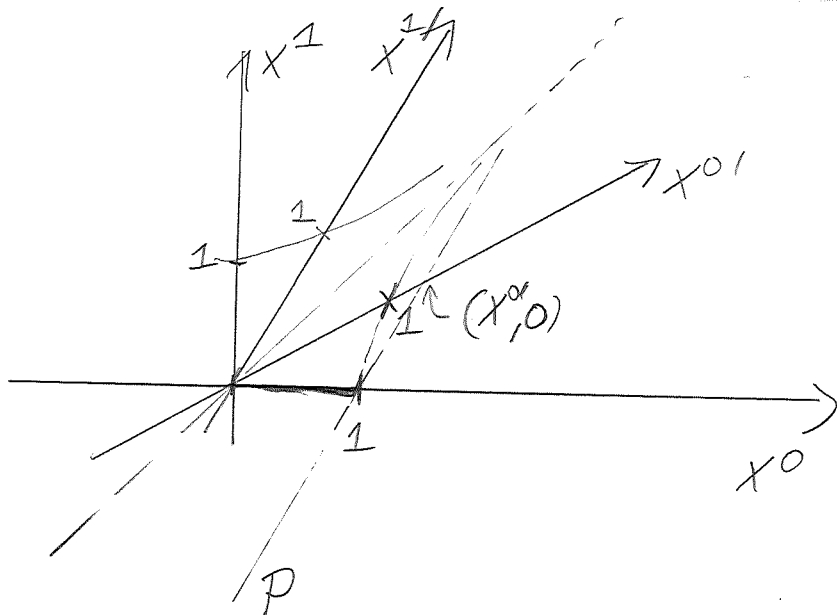
also die selbe Längenkontraktion.

Graphisch:

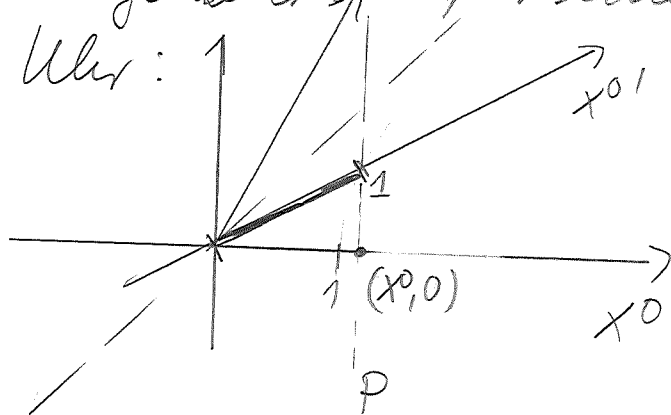


Zeitdilatation

Eine Uhr ruhe in Σ bei $x^1=0$.
Zum Zeitpunkt $x^0=1$ schaue
ein Beobachter in Σ' auf das
Zifferblatt:



Der Ableszeitpunkt $x^{0'}$ in Σ' ist durch den Schnittpunkt der Parallelen p zur $x^{1'}$ -Achse (die die Punkte mit konstantem $x^{0'}$ charakterisiert) mit der $x^{0'}$ -Achse gegeben. Man sieht $x^{0'} > 1$, d.h. bewegte Uhren gehen langsamer. Umgekehrt für eine in Σ' ruhende Uhr:



Ebenfalls $x^0 > 1$ für die Zeitkoordinate, die zu $x^{0'} = 1$ gehört!

Aus (508) folgt (für die in Σ ruhende Uhr) mit $x^1 = 0, x^0 = 1$ sofort.

$$x^{0'} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(543)

(513) Zeigt, dass der Zeitdilations-
faktor durch $\gamma > 1$ gegeben ist.

~ Ende ~

13. VII 07
-105-
V. 08