

1 a) Lagrangefunktion: Kinetische Energie:

$$x = l \cos(\varphi) \quad , \quad y = l \sin(\varphi) \quad , \quad \dot{x} = -l\dot{\varphi} \sin(\varphi) \quad , \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$$

1 Punkt

$$\text{Potential: } V = -mgl \cos(\varphi) + \text{const.},$$

$$\text{Lagrangefunktion: } \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 + mgl \cos(\varphi) \quad \text{mit } m = m(t) = m_0 e^{2\gamma t}$$

1 Punkt

b) Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\varphi}) = -mgl \sin(\varphi)$

1/2 Punkt

$$\Rightarrow \quad m l^2 \ddot{\varphi} + \dot{m} l^2 \dot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0$$

Mit $\dot{m} = 2\gamma m$ und $\sin(\varphi) \approx \varphi$ ergibt sich

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

1/2 Punkt

c) Lösungsansatz, wie immer:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

$$\text{Hier: } \gamma = \sqrt{\frac{2g}{l}} = \sqrt{2}\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = (-\sqrt{2} + 1)\omega_0 \quad , \quad \lambda_2 = (-\sqrt{2} - 1)\omega_0.$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } \varphi(t) = A e^{(-\sqrt{2}+1)\omega_0 t} + B e^{(-\sqrt{2}-1)\omega_0 t}$$

1 Punkt

(Man kann sich natürlich auch an Theorie A, gedämpfter harmonischer Oszillator im Kriechfall, erinnern und das direkt hinschreiben.)

d) Anfangsbedingungen:

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A\omega_0(-\sqrt{2} + 1) + B\omega_0(-\sqrt{2} - 1) \quad \Rightarrow \quad B = A \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$\text{und: } \varphi(0) = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = A + B.$$

$$B \text{ eliminieren } \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\varphi_0(1 + \sqrt{2}) \quad , \quad B = \frac{1}{2}\varphi_0(1 - \sqrt{2}).$$

1/2 Punkt

Skizze: bei $t = 0$: $\varphi = \varphi_0$ und horizontale Steigung ($\dot{\varphi} = 0$), für $t > 0$: monoton fallend (beide Exponenten in der Lösung sind < 0), für $t \rightarrow \infty$: $\varphi \rightarrow 0$ (ist natürlich Schmarrn, der Eimer läuft über).

1/2 Punkt

$\Sigma = 5$ Punkte

2 a) Schwerpunkt: $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$.

1/2 Punkt

Mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ergibt sich

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad (\dot{\mathbf{r}}_1)^2 + (\dot{\mathbf{r}}_2)^2 = 2(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}})^2$$

und damit $\mathcal{L} = m(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{4}m(\dot{\mathbf{r}})^2 - \gamma|\mathbf{r}|$

1.5 Punkte

Man kann natürlich auch direkt hinschreiben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2 - \gamma|\mathbf{r}|, \quad M = 2m, \quad \mu = \frac{1}{2}m$$

b) Erhaltungsgrößen:

Energie: $E = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2 + \gamma|\mathbf{r}|$

Begründung: $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängig (Homogenität der Zeit).

Schwerpunktimпульс: $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$

Begründung: $\mathcal{L}$ invariant unter Verschiebungen des Schwerpunktes, d.h., Verschiebungen des Gesamtsystems (Homogenität des Raumes).

Drehimpuls (= Relativ-Drehimpuls): $\mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$

Begründung: $\mathcal{L}$ ist invariant unter Drehungen des Systems um den Schwerpunkt, d.h., Potential hängt nur von $|\mathbf{r}|$ ab (Isotropie des Raumes $\leftrightarrow$ Zentralpotential für die Relativbewegung).

1 Punkt

c) Polarkoordinaten in der x - y -Ebene: $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\varphi) - r \dot{\varphi} \sin(\varphi), \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\varphi) + r \dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

Einsetzen liefert $\mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2] - \gamma r$

1 Punkt

Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0$

Dies ist gerade die Drehimpulserhaltung (φ ist eine zyklische Koordinate). Mit der hier gefragte Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(0) = 0$ bedeutet dies, daß der Drehimpuls = 0 ist, für alle Zeiten, und damit auch $\varphi = \text{const.}$ für alle Zeiten (auch anschaulich klar).

Also: $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{beliebige Konstante.}$

Die radiale Bewegungsgleichung führt damit auf einen freien Fall der Massen aufeinander:

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) = -\gamma + \mu r (\dot{\varphi})^2 \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{r} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad r(t) = r_0 - \frac{1}{2}\gamma t^2$$

1 Punkt

$\Sigma = 5$ Punkte

3 a) Eigenwertproblem: $\mathbf{D}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, Eigenwerte: $\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{1}) = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} (3-\lambda) & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & (5-\lambda) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$$

1/2 Punkt

Eigenvektoren: Eigenwert in Gleichungssystem einsetzen, sollte auf zwei identische Gleichungen führen, die eine Komponente als freien Parameter unbestimmt lassen:

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}x_1 \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}x_2 \Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = x_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1/2 Punkt

Mit der Normierungsbedingung $\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(1)} = 1$, $\mathbf{x}^{(2)} \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 1$ wird die freie Konstante festgelegt:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1/2 Punkt

Eigenschaften: $\mathbf{D}$ ist symmetrisch, d.h., Eigenwerte sollten reell sein (erfüllt), und Eigenvektoren orthogonal: $\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 0$ (auch erfüllt).

1/2 Punkt

b) Neue Koordinaten: $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{q}$

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\mathbf{q})^T \mathbf{D} (\mathbf{U}\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T (\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}) \mathbf{q} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \widetilde{\mathbf{D}} \mathbf{q}$$

1 Punkt

Für $\mathbf{U} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ setzen wir die oben berechneten *normierten* Eigenvektoren ein, und multiplizieren $\widetilde{\mathbf{D}}$ von Hand aus:

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1/2 Punkt

Explizit, durch Ausmultiplizieren der Matrixprodukte in V :

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}[\lambda_1 (q_1)^2 + \lambda_2 (q_2)^2], \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[3(x_1)^2 + 5(x_2)^2] + \sqrt{3}x_1x_2$$

1/2 Punkt

c) Umkehrung der Transformation: $\mathbf{q} = \mathbf{U}^T \mathbf{x} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}[x_1 + \sqrt{3}x_2] \\ q_2 &= \frac{1}{2}[\sqrt{3}x_1 - x_2] \end{aligned}$$

1/2 Punkt

Skizze: Koordinatenachsen q_1, q_2 sind rechtwinklig und gegenüber x_1, x_2 um $\arctan(\sqrt{3})$ gedreht (also: "irgendwie, aber nicht um 45° gedreht, sondern mehr" (genau: 60°)).

Äquipotentiallinien: Ellipsen, mit Halbachsen auf den q_1, q_2 -Achsen.

1/2 Punkt

(Genauer: $\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 = 2V = \text{const.}$, also $(\frac{q_1}{a})^2 + (\frac{q_2}{b})^2 = 1$ mit $a^2 = 2V/\lambda_1, b^2 = 2V/\lambda_2$.)

$\Sigma = 5$ Punkte

4 a) Kanonische Bewegungsgleichungen: $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \omega_0 y$, $\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}$

und: $\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0$, $\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -m\omega_0^2 y - \omega_0 p_x$ 1 Punkt

b) Methode: p_x und p_y rauswerfen und DGLs für x, y aufstellen:

$\dot{p}_x = 0$, d.h., p_x ist Konstante (Integral der Bewegung) und kann frei gewählt werden (nach Anfangsbedingungen z.B.).

Damit ist $\dot{x}$ direkt durch y gegeben.

Für y schließlich ergibt sich eine DGL 2. Ordnung:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{1}{m}\dot{p}_y = -\omega_0^2 y - \frac{\omega_0}{m}p_x \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\omega_0 \frac{p_x}{m}$$
1 Punkt

Dies ist ein harm. Oszillator mit konstanter äußere Kraft.

Die Lösung lautet bekanntermaßen $y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{p_x}{m\omega_0}$.

Damit ergibt sich $x(t)$ durch integrieren (wir setzen $t_0 = 0$):

$$x(t) - x_0 = \frac{p_x}{m}t + \omega_0 \int_0^t dt' y(t') \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega_0 t) - B \cos(\omega_0 t) + x_0$$
1 Punkt

A, B sind reell, die Lösung hat insgesamt 4 Integrationskonstanten: A, B, p_x, x_0 .

c) Die Anzahl der Erhaltungsgrößen ist gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten -1. Hier: Zwei Freiheitsgrade (x, y) , also 4 (relle) Integrationskonstanten (siehe oben), minus eine, die durch die Wahl des Zeitnullpunktes festgelegt wird, bleiben 3. 1 Punkt

Welche sind dies?

(1.) Hamiltonfunktion, da diese nicht explizit von der Zeit abhängt. Vermutlich ist diese identisch zur Energie, das wissen wir aber nicht.

(2.) x ist in $\mathcal{H}$ eine zyklische Koordinate, daher ist p_x eine Erhaltungsgröße, siehe oben (über deren Bedeutung sich spekulieren läßt). 1/2 Punkt

(3.) Vermutlich eine Art Drehimpuls in z -Richtung (Bewegung ist ja in der x - y -Ebene). Die Lösung aus b) legt nahe, das Objekt $\hat{L} = m(\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}})_z$ zu betrachten, mit den Koordinaten $\hat{x} = x(t) - x_0 = A \sin(\omega_0 t) - B \cos(\omega_0 t)$ und $\hat{y} = y(t) + \frac{p_x}{m\omega_0} = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

Einsetzen ergibt $\hat{L} = m(\hat{x}\dot{\hat{y}} - \hat{y}\dot{\hat{x}}) = 2m\omega_0^2(A^2 + B^2)$, t -unabhängig. 1/2 Punkt

$\Sigma = 5$ Punkte