$\boxed{1}$ **a)** Lagrangefunktion: Kinetische Energie:

$$x = l\cos(\varphi) \quad , \quad y = l\sin(\varphi) \quad , \quad \dot{x} = -l\dot{\varphi}\sin(\varphi) \quad , \quad \dot{y} = l\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}m[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$$ **1 Punkt**

Potential: $V = -mgl\cos(\varphi) + \text{const.}$,

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 + mgl\cos(\varphi) \quad \text{mit} \quad m = m(t) = m_0\, e^{-2\gamma\, t}$$ **1 Punkt**

b) Bewegungsgleichung: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\, l^2\, \dot{\varphi}\right) = -mgl\, \sin(\varphi)$ **1/2 Punkt**

$\Rightarrow \quad ml^2\,\ddot{\varphi} + \dot{m}\, l^2\, \dot{\varphi} + mgl\, \sin(\varphi) = 0$

Mit $\dot{m} = -2\gamma\, m$ und $\sin(\varphi) \approx \varphi$ ergibt sich

$\ddot{\varphi} - 2\gamma\,\dot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi = 0$ mit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ **1/2 Punkt**

c) Lösungsansatz, wie immer:

$$\varphi(t) = e^{\lambda\, t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,.$$

Hier: $\gamma = \sqrt{\dfrac{g}{2\,l}} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}(1+i) \;,\quad \lambda_2 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}(1-i)\,.$

Allgemeine Lösung: $\varphi(t) = e^{\omega_0 t/\sqrt{2}}(Ae^{i\omega_0 t/\sqrt{2}} + Be^{-i\omega_0 t/\sqrt{2}})$ **1/2 Punkt**

Die Integrationskonstanten A, B sind komplex, wie φ.

Physikalische Lösung durch Bilden des Realteils (siehe Theorie A):

$\mathrm{Re}\varphi(t) = e^{\omega_0 t/\sqrt{2}}[a\sin(\omega_0 t/\sqrt{2}) + b\cos(\omega_0 t/\sqrt{2})]$ **1/2 Punkt**

Das Ergebnis kann auch direkt hingeschrieben werden.

a, b sind reell, genauer: $b = (\mathrm{Re}A + \mathrm{Re}B)$, $a = (-\mathrm{Im}A + \mathrm{Im}B)\,.$

d) Anfangsbedingungen: (wir setzen jetzt $\varphi = \mathrm{Re}\varphi$)

$\varphi(0) = b = 0$

und: $\dot{\varphi}(0) = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}a = \Omega_0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}\dfrac{\Omega_0}{\omega_0}$ **1/2 Punkt**

$$\Rightarrow \qquad \varphi(t) = \sqrt{2}\frac{\Omega_0}{\omega_0}e^{\omega_0 t/\sqrt{2}}\sin(\omega_0 t/\sqrt{2})$$

Skizze: Billigerweise ein Sinus, dessen Hüllkurve exponentiell ansteigt. **1/2 Punkt**

$\boxed{\Sigma = \mathbf{5}\text{ Punkte}}$

$\boxed{2}$ **a)** In den Koordinaten $\mathbf{R}$ und $\mathbf{r}$ lautet $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SP} + \mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2 + k|\mathbf{r}|$

Offenbar sind die Massen $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, also

$M = m_1 + m_2 = 3m$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3}m$ **1.5** Punkte

Schwerpunkt: $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{r}_2$ **1/2** Punkt

Man kann $\mathcal{L}_{SP} + \mathcal{L}_{rel}$ natürlich auch von Hand bestimmen, durch Einsetzen von

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{2}{3}\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{1}{3}\mathbf{r}$

b) Erhaltungsgrößen:

Energie: $E = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2 - k\,|\mathbf{r}|$

Begründung: $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängig (Homogenität der Zeit).

Schwerpunktimpuls: $\mathbf{P} = M\,\dot{\mathbf{R}}$

Begründung: $\mathcal{L}$ invariant unter Verschiebungen des Schwerpunktes, d.h., Verschiebungen des Gesamtsystems (Homogenität des Raumes).

Drehimpuls (= Relativ-Drehimpuls): $\mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$

Begründung: $\mathcal{L}$ ist invariant unter Drehungen des Systems um den Schwerpunkt, d.h., Potential hängt nur von $|\mathbf{r}|$ ab (Isotropie des Raumes $\leftrightarrow$ Zentralpotential für die Relativbewegung). **1** Punkt

c) Polarkoordinaten in der x-y-Ebene: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

$\dot{x} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi)$, $\dot{y} = \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)$

Einsetzen liefert $\mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2] + k\,r$ **1** Punkt

Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\,r^2\,\dot{\varphi}) = 0$

Dies ist gerade die Drehimpulserhaltung (φ ist eine zyklische Koordinate). Mit der hier gefragte Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(0) = 0$ bedeutet dies, daß der Drehimpuls $= 0$ ist, für alle Zeiten, und damit auch $\varphi =$const. für alle Zeiten (auch anschaulich klar).

Also: $\varphi(t) = \varphi_0 =$beliebige Konstante. **1/2** Punkt

Die radiale Bewegungsgleichung für $r(t)$ führt damit auf (mit der Anfangsbedingung)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\,\dot{r}) = k + \mu\,r\,(\dot{\varphi})^2 \quad \Rightarrow \quad \mu\ddot{r} = k \quad \Rightarrow \quad r(t) = v_0\,t + \frac{1}{2}\frac{k}{\mu}\,t^2$ **1/2** Punkt

---

Σ= **5** Punkte

$\boxed{3}$ **a)** Eigenwertproblem: $\mathbf{D}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, Eigenwerte: $\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{1}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} (2-\lambda) & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{8} & (9-\lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 11\,\lambda + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 10 \;, \quad \lambda_2 = 1$$ **1/2** Punkt

Eigenvektoren: Eigenwert in Gleichungssystem einzetzen, sollte auf zwei identische Gleichungen führen, die eine Komponente als freien Parameter unbestimmt lassen:

$$\lambda_1 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{8}\,x_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(1)} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{8}\,x_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(2)} = x_2 \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$ **1/2** Punkt

Mit der Normierungsbedingung $\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(1)} = 1$, $\mathbf{x}^{(2)} \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 1$ wird die freie Konstante festgelegt:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix} \;, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$ **1/2** Punkt

Eigenschaften: $\mathbf{D}$ ist symmetrisch, d.h., Eigenwerte sollten reell sein (erfüllt), und Eigenvektoren orthogonal: $\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(2)} = 0$ (auch erfüllt). **1/2** Punkt

b) Neue Koordinaten: $\mathbf{x} = \mathbf{U}\,\mathbf{q}$

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\mathbf{q})^T\mathbf{D}(\mathbf{U}\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T(\mathbf{U}^T\mathbf{D}\mathbf{U})\mathbf{q} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{q}$$ **1** Punkt

Für $\mathbf{U} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ setzen wir die oben berechneten *normierten* Eigenvektoren ein. Damit diagonalisiert $\mathbf{U}$ nach Konstruktion die Matrix $\mathbf{D}$, d.h., $\widetilde{\mathbf{D}}$ besteht gerade aus den Eigenwerten:

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{U}^T\mathbf{D}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **1/2** Punkt

Explizit, durch Ausmultiplizieren der Matrixprodukte in V:

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}[\,\lambda_1\,(q_1)^2 + \lambda_2\,(q_2)^2\,] \;, \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[\,2(x_1)^2 + 9(x_2)^2\,] - \sqrt{8}\,x_1\,x_2$$ **1/2** Punkt

c) Umkehrung der Transformation: $\mathbf{q} = \mathbf{U}^T\,\mathbf{x} \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} q_1 &= \tfrac{1}{3}[x_1 - \sqrt{8}\,x_2] \\ q_2 &= \tfrac{1}{3}[\sqrt{8}\,x_1 + x_2] \end{aligned}$$ **1/2** Punkt

Skizze: Koordinatenachsen q_1, q_2 sind rechtwinklig und gegenüber x_1, x_2 um den Winkel φ gedreht. φ ist < 0 und $|\varphi| > 45^\circ$.

Äquipotentiallinien: Ellipsen, mit Halbachsen auf den q_1, q_2-Achsen. **1/2** Punkt

Genauer: Drehwinkel: $\varphi = -\arctan(\sqrt{8})$,

Ellipsen: $\lambda_1\,q_1^2 + \lambda_2\,q_2^2 = 2\,V$ =const., also $(\frac{q_1}{a})^2 + (\frac{q_2}{b})^2 = 1$ mit $a^2 = 2V/\lambda_1\,, b^2 = 2V/\lambda_2$.

$\Sigma =$ **5** Punkte

$\boxed{4}$ **a)** Kanonische Bewegungsgleichungen: $\dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = 2\dfrac{p_x}{m} - \dfrac{p_\varphi}{ml}$, $\dot{\varphi} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2} - \dfrac{p_x}{ml}$

und: $\dot{p_x} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0$, $\dot{p_\varphi} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -mgl\varphi$ **1** Punkt

b) Methode: zweite Ableitungen bilden und kanonische Gleichungen einsetzen:

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{p}_x}{m} - \frac{\dot{p}_\varphi}{ml} = -\frac{\dot{p}_\varphi}{ml} = g\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{p}_\varphi}{ml^2} - \frac{\dot{p}_x}{ml} = \frac{\dot{p}_\varphi}{ml^2} = -\frac{g}{l}\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

1 Punkt

Allgemeine Lösung: $\varphi(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Aus $\ddot{x}(t) = g\varphi(t)$ folgt

$$\dot{x}(t) = v_0 + g\int \mathrm{d}t\, \varphi(t) = v_0 + \frac{g}{\omega_0}[\,-a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\,]$$

$$x(t) = v_0 t + x_0 - \frac{g}{\omega_0^2}[\,a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)\,] = x_0 + v_0 t - l\varphi(t)$$

1 Punkt

c) Wirkungsprinzip heißt: Wenn zur Lagrangefunktion eine totale zeitliche Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ addiert wird, ändern sich die Bewegungsgleichungen nicht.
Unter Verwendung der Hamiltonfunktion in $\mathcal{L} = p\,\dot{q} - \mathcal{H}$ heißt das: falls

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F$$

bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert.

Wir haben also zu zeigen, daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}) = 2\omega p_\varphi - \omega l p_x$$

1 Punkt

Dazu: kanonische Gleichungen von oben nach p_x und p_φ auflösen ergibt

$$p_x = m(\dot{x} + l\dot{\varphi}) \qquad p_\varphi = ml(\dot{x} + 2l\dot{\varphi})$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F = ml\omega(\dot{x} + 3l\dot{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad F = ml\omega(x + 3l\varphi)$$

1 Punkt

$\Sigma =$ **5** Punkte