Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre
janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

SS 2003

21.07.03

Klausur zur Vorlesung Theorie B SS 2003

Name:		**Matrikelnr.:**	
Vorname:		**Studiengang, Semester:**	
Lehramt ?		**Tutor / Übungsgr.:**	

Wichtige Hinweise:

- ☐ **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**

- ☐ **Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.**
- ☐ **Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.**
- ☐ **Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.**
- ☐ **Dieses Blatt mit abgeben.**

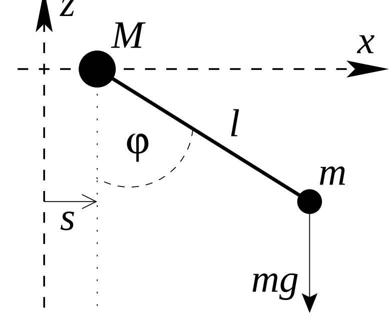
- ☐ **Handys ausschalten und wegpacken !!**

Aushang der Ergebnisse ab Do., 24.7.03 im Eingangsbereich Hochhaus
Rückgabe von Klausur und Scheinen am Freitag, 25.7.02 in den Übungsgruppen

Bitte wenden: Aufgaben auf der Rückseite $\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Üb.	Schein
Punkte							
von maximal	5	6	5	4	20	68	

1 Ein Pendel mit Punktmasse m und starrem, masselosen Faden der Länge l schwingt in der x-z-Ebene. Der Aufhängepunkt des Pendels besteht aus einer weiteren Punktmasse M, die sich auf der x-Achse reibungsfrei bewegen kann.



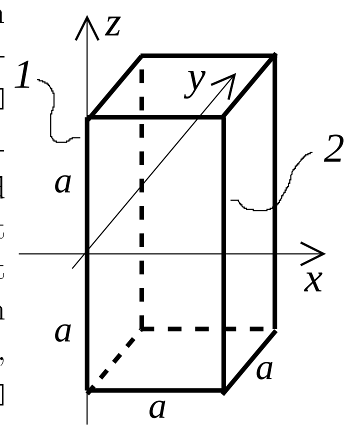
a) Benutzen Sie s und φ als generalisierte Koordinaten, und bestimmen Sie die Lagrangefunktion, die generalisierten Impulse und die Lagrangegleichungen. Welcher dieser Impulse ist eine Erhaltungsgröße? [**3** Punkte]

b) Eliminieren Sie s mit Hilfe des erhaltenen Impulses aus der Bewegungsgleichung für φ. Entwickeln Sie diese Bewegungsgleichung für kleine $\varphi, \dot{\varphi}$ in linearer Ordnung in $\varphi, \dot{\varphi}$, und bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz ω des Pendels.
Kommt ω im Grenzfall $M \to \infty$ (fixierter Aufhängepunkt) korrekt heraus? [**2** Punkte]

2 Gegeben ist ein Quader mit homogener Massendichte $\rho = M/V$. Seine quadratische Grundfläche hat die Kantenlänge a, die Höhe beträgt $2a$. Die Koordinatenachsen sind parallel zu den Kanten, der Ursprung halbiert die Kante 1.

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich dieses Koordinatensystems über die Formel $\Theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3r\, \rho(\mathbf{r}) [\, r^2 \delta_{ij} - x_i\, x_j\,]$, als Funktion von M und a. [**2** Punkte]
Hinweis: Ergebnis: $\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz}$, $\Theta_{xz} = \Theta_{yz} = 0$.

b) Bestimmen Sie daraus die normierten Hauptträgheitsachsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ und die -momente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, indem Sie Θ diagonalisieren. Sind die $\mathbf{e}_i$ orthogonal? [**2** Punkte]



c) Der Quader rotiere kräftefrei mit der Frequenz ω um die z-Achse. Eine Punktmasse m bewegt sich von rechts kommend entlang der x-Achse auf den Ursprung zu und bleibt zur Zeit t_1 auf der Kante 2 kleben. Mit welcher Frequenz ω_1 rotiert die Anordnung jetzt? Zu einer späteren Zeit t_2 löst sich die Masse m wieder. Welche Geschwindigkeit v_2 hat jetzt m, welche Rotationsfrequenz ω_2 der Quader? [**2** Punkte]

3 Gegeben ist die Hamiltonfunktion eines Teilchens in der x-y-Ebene,
$$\mathcal{H}(x, p_x, y, p_y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2\, x^2 - \omega_0\, x\, p_y$$

a) Bestimmen Sie die kanonischen (Hamiltonschen) Gleichungen. [**1** Punkt]

b) Berechnen Sie die allgemeine Bahnkurve $x(t), y(t)$. [**2** Punkte]
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0 v_0$.

c) Gegeben sei nun die Hamiltonfunktion $\widetilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}(\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2\, y^2 + \omega_0\, y\, \tilde{p}_x$
Berechnen Sie die zugehörigen Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ und $\widetilde{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$, und zeigen Sie, daß für die Wirkungen S und $\widetilde{S}$ gilt: $\widetilde{S} = S + const.$ [**2** Punkte]

4 Geben Sie an (mit Begründung!, nicht notwendig mit Rechnung), welche der Größen Energie, Impuls (3 Komponenten), Drehimpuls (3 Komp.) Erhaltungsgrößen sind:

a) Ein Teilchen im Potential, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{z}{|\mathbf{r}|}$ $\quad \mathbf{r} = (x, y, z)$ [**1** Punkt]

b) Ein Teilchen mit zeitabhängiger Masse, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(t) \dot{\mathbf{r}}^2$ [**1** Punkt]

c) Zwei Teilchen mit Wechselwirkung, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) + e^{-\alpha |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ [**2** Punkte]