$\boxed{1}$ **a)** Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$

Generalisierte Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= s + l\sin(\varphi) \\ z &= -l\cos(\varphi) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{s} + l\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ \dot{z} &= l\dot{\varphi}\sin(\varphi) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Einsetzen und ausmultiplizieren,

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

Potentielle Energie: $U = mgh = mgl(1-\cos(\varphi)) + \underbrace{const.}_{\text{beliebig}}$

Also lautet die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(s,\dot{s},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\varphi) - mgl(1-\cos(\varphi))$$

$\boxed{\textbf{1}\text{ Punkt}}$

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{s}\cos(\varphi) \\ p_s &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} = (M+m)\dot{s} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Lagrangegleichungen: für φ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= -ml\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\varphi) - mgl\sin(\varphi) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_\varphi &= ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{s}\cos(\varphi) - ml\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ &\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{\ddot{s}}{l}\cos(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

für s: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_s = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s}$,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_s = const. \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t} = (M+m)\ddot{s} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)$$

Also ist p_s eine Erhaltungsgröße. $\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

b) Eliminiere s, genauer: $\ddot{s}$ aus der Bewegungsgleichung für φ: Aus $\dot{p}_s = 0$ von oben folgt

$$\ddot{s} = \frac{ml}{M+m}[\,\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - \ddot{\varphi}\cos(\varphi)\,]$$

das einsetzen in die Gleichung für φ,

$$\ddot{\varphi}\left[1 - \frac{m}{M+m}\cos^2(\varphi)\right] + \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{m}{M+m}\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$$

$\boxed{\textbf{1}\ \text{Punkt}}$

Entwickeln in linearer Ordnung $\varphi, \dot{\varphi}$:

$\dot{\varphi}^2$-Term weglassen und $\sin(\varphi) = \varphi + \mathcal{O}(\varphi^3)$, $\cos(\varphi) = 1 + \mathcal{O}(\varphi^2)$,

$$\ddot{\varphi}\left[1 - \frac{m}{M+m}\right] + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\varphi = 0$$

Also der übliche harmonische Oszillator mit einer Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}}$$

$\boxed{\textbf{1}\ \text{Punkt}}$

Kontrolle: fixierter Aufhängepunkt $M \to \infty$: $\lim_{M\to\infty} \omega = \sqrt{g/l}$

$\boxed{\Sigma = \textbf{5}\ \text{Punkte}}$

$\boxed{2}$ **a)** Für den Quader mit homogener Massendichte $\rho = M/V$ lautet der Trägheitstensor:

$$\theta_{ij} = \rho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_{-a}^a \mathrm{d}z \, [\, (x^2 + y^2 + z^2)\delta_{ij} - x_i \, x_j \,]$$

Diagonalelemente:

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \rho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_{-a}^a \mathrm{d}z \, [\, y^2 + z^2 \,] \\
&= \rho [\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \, y^2 \int_{-a}^a \mathrm{d}z + \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_{-a}^a \mathrm{d}z \, z^2 \,] \\
&= \rho [\, a \cdot \frac{a^3}{3} \cdot 2a + a \cdot a \cdot 2\frac{a^3}{3} \,] = \frac{4}{3}\rho a^5
\end{aligned}$$

1 Punkt

$$\begin{aligned}
\Theta_{yy} &= \ldots = \frac{4}{3}\rho a^5 \\
\Theta_{zz} &= \rho [\int_0^a \mathrm{d}x \, x^2 \int_0^a \mathrm{d}y \int_{-a}^a \mathrm{d}z + \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \, y^2 \int_{-a}^a \mathrm{d}z \,] \\
&= \rho [\, \frac{a^3}{3} \cdot a \cdot 2a + a \cdot \frac{a^3}{3} \cdot 2a \,] = \frac{4}{3}\rho a^5
\end{aligned}$$

1/2 Punkt

Außerdiagonalelemente:

$$\begin{aligned}
\Theta_{xy} &= -\rho [\int_0^a \mathrm{d}x \, x \int_0^a \mathrm{d}y \, y \int_{-a}^a \mathrm{d}z \,] = -\frac{1}{2}\rho a^5 \\
\Theta_{xz} &= -\rho [\int_0^a \mathrm{d}x \, x \int_0^a \mathrm{d}y \int_{-a}^a \mathrm{d}z \, z \,] = -\rho [\, \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot 0 \,] = 0 \\
\Theta_{yz} &= \ldots = 0
\end{aligned}$$

Mit $\rho = M/V$ und $V = 2a^3$ ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \Theta_{yy} = \Theta_{zz} \equiv \Theta_0 = \frac{2}{3} M a^2 \\
\Theta_{xy} &\equiv \Theta' = -\frac{1}{4} M a^2 \\
\Theta_{xz} &= \Theta_{yz} = 0
\end{aligned}$$

1/2 Punkt

Als Matrix geschrieben:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_0 & \Theta' & 0 \\ \Theta' & \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{pmatrix}$$

b) Diagonalisieren: $[\Theta - \lambda 1]\mathbf{e} = 0$

Eigenwerte λ: $\det(\Theta - \lambda 1) = 0$, also

$$(\Theta_0 - \lambda)[(\theta_0 - \lambda)^2 - (\Theta')^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \Theta_0 = \frac{2}{3}Ma^2$$

und $\lambda_{1,2} = \Theta_0 \pm \sqrt{\Theta_0^2 - \Theta_0^2 + (\Theta')^2} = \Theta_0 \pm \Theta'$, also

$$\lambda_1 = \Theta_0 + \Theta' = \frac{5}{12}Ma^2 \quad , \quad \lambda_2 = \Theta_0 - \Theta' = \frac{11}{12}Ma^2$$

1 Punkt

Eigenvektoren: Einsetzen vom λ in das homogene Gleichungssystem ergibt jeweils:

$$\lambda_3 = \Theta_0 \quad : \quad \mathbf{e}_3 = z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{normiert:} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = (\Theta_0 - \Theta') \quad : \quad \mathbf{e}_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{normiert:} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = (\Theta_0 + \Theta') \quad : \quad \mathbf{e}_1 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{normiert:} \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 Punkt

Orthogonal: $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Die Hauptträgheitsmomente sind die Eigenwerte: $\Theta_i \equiv \lambda_i$.

c) Drehimpulserhaltung:

$t < t_1$: Quader: die z-Achse ist eine Hauptträgheitsachse, also ist der Drehimpuls $||\mathbf{e}_z$, mit dem Betrag $L^Q = \Theta_3\omega$.

Die Masse m hat keinen Drehimpuls, da sie auf den Ursprung zufliegt: $\mathbf{L}^m = m(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) = 0, \mathbf{r}||\dot{\mathbf{r}}$. Gesamtdrehimpuls: $L = L^Q = \theta_3\omega$.

$t_1 < t < t_2$: Inelastischer Stoß von m auf die Kante 2 des Quaders. Drehimpuls: Trägheitsmoment von m ist jetzt $\Theta^m_{yy} = \Theta^m_{zz} = ma^2$, restliche $\Theta^m_{ij} = 0$. Also ist der Gesamtdrehimpuls immer noch $||\mathbf{e}_z$, mit dem Betrag $L = (\Theta_3 + ma^2)\omega_1$. Erhaltung:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\Theta_3}{\Theta_3 + ma^2} = \frac{\frac{2}{3}Ma^2}{\frac{2}{3}Ma^2 + ma^2} = \frac{1}{1 + \frac{3m}{2M}}$$

1 Punkt

$t > t_2$: Wenn m und der Quader getrennt werden, fliegt m gleichförmig mit der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}_2| = v_2$ weiter, wobei v_2 die Bahngeschw. zur Zeit $t = t_2$ ist, die dem Drehimpuls entspricht, $L^m = ma^2\omega_1 = mav_2$, also $v_2 = a\omega_1$.

Der Quader behält seinerseits seinen Drehimpuls $L^Q = \Theta_3\omega_1$, d.h., $\omega_2 = \omega_1$. **1** Punkt

$\Sigma =$ **6** Punkte

$\boxed{3}$ **a)** kanonische Gleichungen:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \quad , \quad \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} \quad , \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad , \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}$$

Damit ergibt sich aus der Hamiltonfunktion:

$$p_x = m\dot{x} \quad , \quad p_y = m\dot{y} + m\omega_0 x \quad , \quad \dot{p}_x = -m\omega_0^2 x + \omega_0 p_y \quad , \quad \dot{p}_y = 0$$

1 Punkt

b) Suche Bewegungsgleichung für x:

$$\dot{p}_x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + \omega_0 p_y$$

p_y ist eine Erhaltungsgröße, $p_y = const. \equiv mv_0$,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0 v_0$$

1/2 Punkt

Allgemeine Lösung: $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) + \dfrac{v_0}{\omega_0}$ **1/2** Punkt

y gewinnen wir aus

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega_0 x = v_0 - \omega_0 x \quad , \quad \dot{y} = -\omega_0 A\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Einmal integrieren, die entstehenden Integrationskonstanten können zu einer einzigen y_0 zusammengezogen werden,

$$y(t) = y_0 - A\sin(\omega_0 t - \varphi)$$

1 Punkt

c) Die Lagrangefunktion ergibt sich aus $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{H}(x, p_x, y, p_y)$.
Man muß die Impulse über die kanonischen Gleichungen eliminieren. Es war $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y} + m\omega_0 x$, dies einsetzen und alles ausmultiplizieren ergibt

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_0 x\dot{y}$$

1 Punkt

Mit der neuen Hamiltonfunktion ergeben sich auch neue Impulse! Die kanonischen Gleichungen ergeben jetzt $\tilde{p}_x = m\dot{x} - m\omega_0 y$, $\tilde{p}_y = m\dot{y}$. Damit folgt

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m\omega_0 y\dot{x}$$

1/2 Punkt

Differenz der Wirkungen: ist eine Konstante, wenn

$$\widetilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \widetilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = -m\omega_0(y\dot{x} + x\dot{y}) \quad \Rightarrow \quad f = -m\omega_0\, xy$$

$\boxed{\mathbf{1/2} \text{ Punkt}}$

$\boxed{\Sigma = \mathbf{5} \text{ Punkte}}$

$\boxed{4}$ **a)** $\mathcal{L}$ nicht explizit t-abhängig $\Rightarrow$ Energieerhaltung.

$\mathcal{L}$ *nicht* translationsinvariant, $\mathcal{L}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \neq \mathcal{L}(\mathbf{r}+\mathbf{a},\dot{\mathbf{r}}) \Rightarrow$ *keine* Impulserhaltung.

$\mathcal{L}$ invariant unter Drehungen um die z-Achse $\Rightarrow L_z$ ist erhalten.

$\mathcal{L}$ *nicht* invariant unter Drehungen um die x- oder y-Achse $\Rightarrow L_x$, L_y *nicht* erhalten.

$\boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$

b) $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t) \Rightarrow$ *keine* Energieerhaltung.

Aber: $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{L}(D\dot{\mathbf{r}})$, D =beliebige (zeitunabhängige) Drehmatrix $\Rightarrow \mathbf{L}$ ist erhalten.

$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{L}(\dot{(\mathbf{r}+\mathbf{a})})$, $\mathbf{a}$ =beliebiger (zeitunabhängiger) Translationsvektor $\Rightarrow \mathbf{p}$ ist erhalten.

$\boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$

Von Hand:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m(t)\dot{x}_i \quad , \quad \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{p} = m(t)\dot{\mathbf{r}} \quad , \quad \dot{\mathbf{p}} = 0 \, ,$$
$$\dot{\mathbf{L}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \underbrace{\dot{\mathbf{p}}}_{=0}) = m(t)(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \, .$$

c) Relativ- (rel) und Schwerpunkt- (SP) koordinaten: $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$,

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2 + e^{-\alpha|\mathbf{r}|}}_{=\mathcal{L}_{rel}} + \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2}_{=\mathcal{L}_{SP}} \quad , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2} \quad , \quad M = m_1 + m_2 = 2m$$

$\mathcal{L}_{SP}$ hat alle Symmetrien $\Rightarrow$ Energie, Impuls, Drehimpuls sind erhalten.

$\mathcal{L}_{rel}$ hat *keine* Invarianz unter Verschiebungen, $\mathcal{L}_{rel}(\mathbf{r}) \neq \mathcal{L}_{rel}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \Rightarrow$ Relativimpuls $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ *nicht* erhalten.

$\mathcal{L}_{rel}$ invariant unter beliebigen Drehungen $\Rightarrow \mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$ ist erhalten.

$\mathcal{L}_{rel} \neq \mathcal{L}_{rel}(t) \Rightarrow$ Energie der Relativbewegung und damit die Gesamtenergie ist erhalten.

$\boxed{\textbf{2} \text{ Punkte}}$

$\boxed{\Sigma = \textbf{4} \text{ Punkte}}$