Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **21.10.03**

http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre
janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

*Nach*klausur zur Vorlesung Theorie B SS 2003

Name:		**Matrikelnr.:**	
Vorname:		**Studiengang, Semester:**	
Lehramt ?		**Tutor / Übungsgr.:**	

Wichtige Hinweise:

- ☐ **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**

- ☐ **Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.**
- ☐ **Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.**
- ☐ **Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.**
- ☐ **Dieses Blatt mit abgeben.**

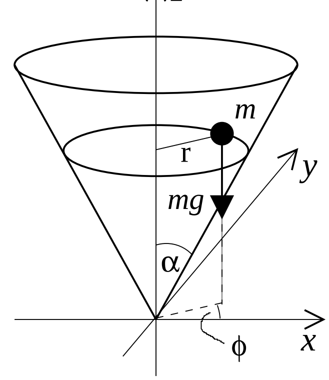
- ☐ **Handys ausschalten und wegpacken !!**

Aushang der Ergebnisse ab Mo., 27.10.03 im Eingangsbereich Hochhaus
Rückgabe am Montag, 27.10.03 und Dienstag, 28.10.03
jeweils ab 15:00 Uhr im Raum 10.13

Bitte wenden: Aufgaben auf der Rückseite $\Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow$

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Üb.	Schein
Punkte							
von maximal	6	6	5	3	20	68	

1 Eine Punktmasse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft auf der Innenfläche eines Kegels mit halbem Öffnungswinkel α.

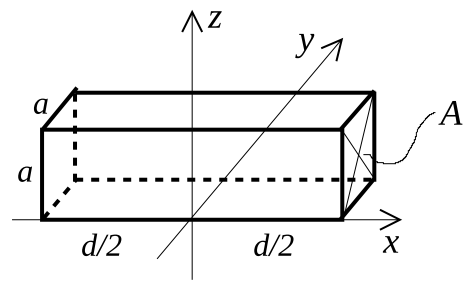


a) Benutzen Sie r und ϕ als generalisierte Koordinaten. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion, die generalisierten Impulse und die Lagrangegleichungen. Welcher dieser Impulse ist eine Erhaltungsgröße? Benutzen Sie die Abkürzung $f = 1/\tan(\alpha)$. [**3** Punkte]

b) Eliminieren Sie $\dot{\phi}$ aus der Bewegungsgleichung für r. Zeigen Sie, daß die Kreisbahn $r = r_0 = const.$ eine Lösung dieser Bewegungsgleichung ist. Bestimmen Sie r_0. [**1** Punkt]

c) Die Masse wird ein wenig aus der Kreisbahn ausgelenkt. Zeigen Sie, daß man für kleine Auslenkung u einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz $\omega_0 = \left[\frac{3g}{r_0}\frac{f}{1+f^2}\right]^{1/2}$ erhält. [**2** Punkte]
Hinweis: $r(t) = r_0 + u(t)\,,\quad (1+x)^{-3} = 1 - 3x + \ldots$

2 Gegeben ist ein Quader mit homogener Massendichte $\rho = M/V$. Seine quadratische Grundfläche hat die Kantenlänge a, die Höhe beträgt d. Die Koordinatenachsen sind parallel zu den Kanten, der Ursprung halbiert eine der Kanten d.



a) Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ bezüglich dieses Koordinatensystems über die Formel $\Theta_{ij} = \int d^3r\,\rho(\mathbf{r})[\,r^2\delta_{ij} - x_i\,x_j\,]$ als Funktion von a, d und M. [**2** Punkte]
Hinweis: Ergebnis: $\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{zz} & \Theta_{yz} \\ 0 & \Theta_{yz} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie die normierten Hauptträgheitsachsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ und die -momente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$. Sind die $\mathbf{e}_i$ orthogonal? [**2** Punkte]

c) Der Quader rotiere kräftefrei mit der Frequenz ω um die x-Achse. Ein punkförmiger Klumpen der Masse m bewegt sich parallel zur x-Achse und bleibt zur Zeit t_1 auf dem Mittelpunkt A einer der Grundflächen kleben. Mit welcher Frequenz ω_1 rotiert die Anordnung jetzt? Zu einer späteren Zeit t_2 ist der Klumpen auf dieser Grundfläche zu einer Kreisscheibe mit Radius R zerlaufen. Welche Rotationsfrequenz ω_2 hat jetzt die Anordnung? [**2** Punkte]

3 Gegeben ist die Hamiltonfunktion eines Systems mit zwei Freiheitsgraden r und s:

$$\mathcal{H}(r, p_r, s, p_s) = \frac{p_s^2}{2m} + \frac{(p_s - p_r)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 s^2$$

a) Bestimmen Sie die kanonischen (Hamiltonschen) Gleichungen, und geben Sie die kanonischen Impulse $p_s(\dot{r}, \dot{s})$, $p_r(\dot{r}, \dot{s})$ an. [**1** Punkt]

b) Berechnen Sie $r(t), s(t)$ (allgemeine Lösung). [**2** Punkte]
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $\ddot{s} + 2\omega_0^2 s = 0$.

c) Gegeben sei nun $\widetilde{\mathcal{H}}(r, \tilde{p}_r, s, \tilde{p}_s) = \dfrac{\tilde{p}_s^2}{2m} + \dfrac{(\tilde{p}_s - \tilde{p}_r)^2}{2m} + \dfrac{3}{2}m\omega_0^2 s^2 + \omega_0 s(2\tilde{p}_s - \tilde{p}_r)$
Berechnen Sie die zugehörigen Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(r, \dot{r}, s, \dot{s})$ und $\widetilde{\mathcal{L}}(r, \dot{r}, s, \dot{s})$.
Zeigen Sie, daß für die Wirkungen S und $\widetilde{S}$ gilt: $\widetilde{S} = S + const.$ [**2** Punkte]

4 Beantworten Sie die folgenden Fragen mit je einem kurzen Satz. Keine Rechnungen! [**je 1/2** Punkt]

(1) Worin liegt der Vorteil generalisierter Koordinaten gegenüber kartesischen?
(2) Aus welchem Prinzip lassen sich die Lagrange- als auch die Hamilton-Gleichungen ableiten?
(3) Welche Bedingungen sind hinreichend für die Erhaltung von Energie, Impuls, Drehimpuls?
(4) Was ist die Aussage des Noethertheorems?
(5) Was vesteht man unter einer Scheinkraft? Geben Sie 2 Beispiele an.
(6) $f(q, p)$ sei eine Erhaltungsgröße. Welche Poissonklammer drückt diesen Sachverhalt aus?