1 **a)** Generalisierte Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\phi) & \qquad \dot{x} &= \dot{r}\cos(\phi) - r\dot{\phi}\sin(\phi) \\ y &= r\sin(\phi) & \Rightarrow \qquad \dot{y} &= \dot{r}\sin(\phi) + r\dot{\phi}\cos(\phi) \\ z &= \frac{r}{\tan(\alpha)} = rf & \qquad \dot{z} &= \dot{r}f \end{aligned}$$

1/2 Punkt

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Koordinaten einsetzen und ausmultiplizieren,

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2(1+f^2) + (r\dot{\phi})^2\right]$$

Potentielle Energie: $U = mgz = mgrf$

Also lautet die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(r,\dot{r},\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2(1+f^2) + r^2\dot{\phi}^2 - 2gfr\right]$$

1 Punkt

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \\ p_r &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}(1+f^2) \end{aligned}$$

1/2 Punkt

Lagrangegleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}(1+f^2) = r\dot{\phi}^2 - gf$$

1/2 Punkt

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$$

Das heißt, $p_\phi = const.$ ist eine Erhaltungsgröße. **1/2** Punkt

b) Eliminiere $\dot{\phi}$ über den erhaltenen Impuls (der die Rolle einer Integrationskonstanten ($\leftrightarrow$ Anfangsbedingung) spielt):

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \quad \text{einsetzen} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}(1+f^2) = \frac{p_\phi^2}{m^2r^3} - gf$$

1/2 Punkt

Kreisbahn: $r = r_0 = const.\,,\ \dot{r} = \ddot{r} = 0\,,$

$$\left(\frac{p_\phi^2}{m^2r_0^3} - gf\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \left(\frac{p_\phi^2}{m^2gf}\right)^{1/3}$$

1/2 Punkt

c) Betrachte kleine Auslenkungen u aus der Kreisbahn: $r(t) = r_0 + u(t)\,,\ \Rightarrow\ \ddot{r} = \ddot{u}\,.$

Ansatz einsetzen: $\ddot{u}(1+f^2) = \dfrac{p_\phi^2}{m^2}\dfrac{1}{(r_0+u)^3} - gf$

Entwickeln: $\dfrac{1}{(r_0+u)^3} = \dfrac{1}{r_0^3}\dfrac{1}{(1+u/r_0)^3} = \dfrac{1}{r_0^3}\left[1 - 3\dfrac{u}{r_0} + \mathcal{O}(u^2)\right]$

Um einen harmonischen Oszillator zu finden, brauchen wir natürlich nur die lineare Ordnung u mitzunehmen (mehr war ja auch nicht angegeben ;-); einsetzen:

$$\ddot{u}(1+f^2) = \frac{p_\phi^2}{m^2r_0^3}\left[1 - 3\frac{u}{r_0}\right] - gf$$

1 Punkt

Jetzt noch das Ergebnis von oben für die Gleichgewichtslage r_0 einsetzen, $\dfrac{p_\phi^2}{m^2r_0^3} = gf\,,$

$$\ddot{u} + \left[\frac{3gf}{(1+f^2)r_0}\right]u = 0$$

Die Masse führt also harmonische Pendelbewegungen um die Kreisnbahn aus, mit dem Frequenzquadrat

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{r_0}\frac{f}{1+f^2} = \frac{3g}{r_0}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

1 Punkt

dabei wurde benutzt: $\dfrac{f}{1+f^2} = \dfrac{1/f}{1+(1/f)^2} = \dfrac{\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,.$

$\Sigma =$ **6** Punkte

2 **a)** Für den Quader mit homogener Massendichte $\rho = M/V$ lautet der Trägheitstensor:

$$\theta_{ij} = \rho \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z \,[\,(x^2+y^2+z^2)\delta_{ij} - x_i\,x_j\,]$$

Im einzelnen:

$$\Theta_{xx} = \rho \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z \,[\,y^2+z^2\,] = \rho d[\,\frac{a^3}{3}\cdot a + a \cdot \frac{a^3}{3}\,] = \frac{2}{3}\rho d a^4$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

$$\Theta_{yy} = \rho \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z \,[\,x^2+z^2\,] = \rho a[\,\frac{2}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot a + d\cdot\frac{a^3}{3}\,] = \frac{1}{12}\rho[\,d^3a^2 + 4da^4\,]$$

$$\Theta_{zz} = \Theta_{yy} \qquad \text{(aus Symmetriegründen oder durch Ausrechnen)}$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = -\,\rho \underbrace{\int_{-d/2}^{d/2} x\,\mathrm{d}x}_{=0} \int_0^a y\,\mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z \;= 0$$

$$\Theta_{xz} = \Theta_{zx} = -\,\rho \underbrace{\int_{-d/2}^{d/2} x\,\mathrm{d}x}_{=0} \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a z\,\mathrm{d}z \;= 0$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

$$\Theta_{yz} = \Theta_{zy} = -\rho \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}x \int_0^a y\,\mathrm{d}y \int_0^a z\,\mathrm{d}z \;= -\rho d \cdot \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{4}\rho d a^4$$

Mit $\rho = M/V$ und $V = a^2 d$ ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \frac{2}{3}Ma^2 \\
\Theta_{yy} &= \Theta_{zz} = \frac{1}{12}M[\,d^2 + 4a^2\,] \\
\Theta_{xy} &= \Theta_{xz} = 0 \\
\Theta_{yz} &= -\frac{1}{4}Ma^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Der Trägheitstensor hat also die Form:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{zz} & \Theta_{yz} \\ 0 & \Theta_{yz} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}$$

Statt Θ_{zz} kann darin natürlich Θ_{yy} geschrieben werden, und statt Θ_{yz} auch Θ_{zy}.

b) Eigenwerte:

$$\det(\Theta - \lambda\, 1) = \det \begin{pmatrix} (\Theta_{xx} - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (\Theta_{zz} - \lambda) & \Theta_{yz} \\ 0 & \Theta_{yz} & (\Theta_{zz} - \lambda) \end{pmatrix} = 0$$

charakteristische Gleichung: $(\Theta_{xx} - \lambda)[\,(\Theta_{zz} - \lambda)^2 - (\Theta_{yz})^2\,] = 0$ $\boxed{\mathbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Lösung: $\lambda_1 = \Theta_{xx}$, $\lambda^2 - 2\lambda\Theta_{zz} - (\Theta_{yz})^2 + (\Theta_{zz})^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{2,3} = \Theta_{zz} \pm |\Theta_{yz}|$ Die Hauptmomente sind also:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\equiv \lambda_1 = \Theta_{xx} = \frac{2}{3} M a^2 \\ \Theta_2 &\equiv \lambda_2 = \Theta_{zz} - \Theta_{yz} = \frac{M}{12}[\, d^2 + 7a^2\,] \\ \Theta_3 &\equiv \lambda_3 = \Theta_{zz} + \Theta_{yz} = \frac{M}{12}[\, d^2 + a^2\,] \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Eigenvektoren: homogenes Gleichungssystem:

$$(\Theta - \lambda\, 1)\mathbf{e} = 0 \;, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} (\Theta_{xx} - \lambda)x &= 0 \\ (\Theta_{zz} - \lambda)y + \Theta_{yz} z &= 0 \\ \Theta_{yz} y + (\Theta_{zz} - \lambda) z &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Einsetzen der drei Werte für λ und jeweils nach x, y, z auflösen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \Theta_{xx} &: \; \mathbf{e}_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{normiert: } \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = \Theta_{zz} - \Theta_{yz} &: \; \mathbf{e}_2 = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{normiert: } \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = \Theta_{zz} + \Theta_{yz} &: \; \mathbf{e}_3 = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{normiert: } \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{1/2}\text{ Punkt}}$

Orthogonal: $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

c) Drehimpulserhaltung:

$t < t_1$: Quader: die x-Achse ist eine Hauptträgheitsachse, also ist der Drehimpuls $||\mathbf{e}_x$, mit dem Betrag $L^Q = \Theta_1\omega = \Theta_{xx}\omega$.

Die Punktmasse m hat einen Drehimpuls mit Komponenten in y und z-Richtung. Diese vernachlässigen wir. Gesamtdrehimpuls: $L = L^Q = \theta_3\omega$.

$t = t_1$: m befindet sich auf dem Mittelpunkt A der Grundfläche des Quaders. Drehimpuls: Trägheitsmoment von m ist $\Theta_{xx}^m = m(a/\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}ma^2$, der Gesamtdrehimpuls ist immer noch $||\mathbf{e}_x$, mit dem Betrag $L = (\Theta_1 + \frac{1}{2}ma^2)\omega_1$. Erhaltung:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \frac{1}{2}ma^2} = \frac{\frac{2}{3}Ma^2}{\frac{2}{3}Ma^2 + \frac{1}{2}ma^2} = \frac{1}{1 + \frac{3m}{4M}}$$

1 Punkt

$t > t_2$: m ist Kreisscheibe mit Radius R: Trägheitsmoment der Kreisscheibe ist $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$, mit Steiner folgt also $\Theta_{xx}^m = \frac{1}{2}m(a^2 + R^2)$. Drehimpulserhaltung:

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \frac{1}{2}m(a^2 + R^2)} = \frac{1}{1 + \frac{3m}{4M}(1 + R^2/a^2)}$$

1 Punkt

Σ= **6** Punkte

$\boxed{3}$ **a)** kanonische Gleichungen:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \quad , \quad \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} \quad , \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \quad , \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}$$

Damit ergibt sich aus der Hamiltonfunktion:

$$m\dot{r} = p_r - p_s \quad , \quad m\dot{s} = 2p_s - p_r \quad , \quad \dot{p}_r = 0 \quad , \quad \dot{p}_s = -m\omega_0^2 s$$

1/2 Punkt

Impulse durch Auflösen der Gleichungen für $\dot{r}, \dot{s}$:

$$\begin{aligned} p_r &= m(2\dot{r} + \dot{s}) \\ p_s &= m(\dot{r} + \dot{s}) \end{aligned}$$

1/2 Punkt

b) Kanonische Gleichungen für $\dot{r}, \dot{s}$ nochmal ableiten und Konstanz von p_r (Erhaltungsgröße) ausnutzen:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= \dot{p}_r - \dot{p}_s \\ m\ddot{s} &= 2\dot{p}_s - \dot{p}_r \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m\ddot{r} &= m\omega_0^2 s \\ m\ddot{s} &= -2m\omega_0^2 s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{r} = \omega_0^2 s \\ \ddot{s} + 2\omega_0^2 s = 0 \end{aligned}$$

1/2 Punkt

Die Gleichung für s ist ein harmonischer Oszillator, allgemeine Lösung:

$s(t) = s_0 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t - \varphi_0)$ oder eine äquivalente Schreibweise. **1/2** Punkt

Die Gleichung für r löst man durch zweimal integrieren:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= v_0 + \omega_0^2 \int \mathrm{d}t\, s(t) = v_0 + \frac{\omega_0 s_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t - \varphi_0) \\ r(t) &= r_0 + \int \mathrm{d}t\, \dot{r}(t) = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} s_0 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t - \varphi_0) \end{aligned}$$

1 Punkt

Im Ergebnis $r(t), s(t)$ steht die korrekte Anzahl von Integrationskonstanten: s_0, φ_0, v_0, r_0.

c) Die Lagrangefunktion ergibt sich aus $\mathcal{L}(r, \dot{r}, s, \dot{s}) = p_r \dot{r} + p_s \dot{s} - \mathcal{H}(r, p_r, s, p_s)\,.$

Man muß die Impulse über die kanonischen Gleichungen eliminieren.

Es war $p_r = m(2\dot{r} + \dot{s})\,, p_s = m(\dot{r} + \dot{s})\,.$

dies einsetzen und alles ausmultiplizieren ergibt

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, s, \dot{s}) = m[\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \dot{r}\dot{s} - \frac{1}{2}\omega_0^2 s^2\,]$$

1/2 Punkt

Mit der neuen Hamiltonfunktion ergeben sich auch neue Impulse! Die kanonischen Gleichungen ergeben jetzt

$$\begin{aligned} m\dot{r} &= (\tilde{p}_r - \tilde{p}_s) - m\omega_0 s \\ m\dot{s} &= (2\tilde{p}_s - \tilde{p}_r) + 2m\omega_0 s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{p}_r &= m(2\dot{r} + \dot{s}) = p_r \\ \tilde{p}_s &= m(\dot{r} + \dot{s}) - m\omega_0 s = p_s - m\omega_0 s \end{aligned}$$

1/2 Punkt

Einsetzen dieser Impulse in $\widetilde{\mathcal{H}}$ liefert:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2m}(p_s - m\omega_0 s)^2 + \frac{1}{2m}(p_s - p_r - m\omega_0 s)^2 + \frac{3}{2}m\omega_0^2 s^2 + \omega_0 s(2p_s - p_r - 2m\omega_0 s) \\ &= \frac{1}{2m}p_s^2 + \frac{1}{2m}(p_s - p_r)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 s^2 \\ &= \mathcal{H} \end{aligned}$$

Die neue Lagrangefunktion ist damit

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}} &= \tilde{p}_r \dot{r} + \tilde{p}_s \dot{s} - \mathcal{H} \\ &= p_r \dot{r} + p_s \dot{s} - \mathcal{H} - m\omega_0 s\dot{s} \\ &= \mathcal{L} - m\omega_0 s\dot{s} \end{aligned}$$

1/2 Punkt

Differenz der Wirkungen: ist eine Konstante, denn

$$\widetilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \widetilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = -m\omega_0 s\dot{s} \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{1}{2}m\omega_0 s^2$$

1/2 Punkt

Beachte: ω_0, nicht etwa ω_0^2 in f. f hat Dimension Energie$\times$Zeit.

$\Sigma =$ **5** Punkte

$\boxed{\mathbf{4}}$ Antworten auf Fragen: **je 1/2** Punkt

(1) Durch die Verwendung geeigneter generalisierter Koordinaten werden Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigt.

(2) Aus dem (Hamiltonschen) Prinzip der kleinsten Wirkung.

(3) Symmetrien der Lagrangefunktion: Invarianz unter zeitlichen Verschiebungen (Homogenität der Zeit $\rightarrow$ Energie), räumlichen Verschiebungen (Homogenität des Raumes $\rightarrow$ Impuls), Drehungen (Isotropie des Raumes $\rightarrow$ Drehimpuls).

(4) Zu einer kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangefunktion (wie die unter (3) genannten) korrespondiert eine Erhaltungsgröße. (Diese wird vom Noethertheorem definiert).

(5) Eine Scheinkraft ist eine Kraft, die aus der beschleunigten (nicht gleichförmigen) Bewegung des Bezugssystems (Nicht-Inertialsystems) resultiert.
Beispiele: Zentrifugalkraft, Corioliskraft, Trägheitskraft im rotierenden System; konstante Scheinkraft im linear beschleunigten System.

(6) Mit der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ ist dies $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{ f, \mathcal{H} \} = 0\,.$

$\boxed{\Sigma = \mathbf{3}\ \text{Punkte}}$