Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Klausur zur Vorlesung Theorie B SS 2004

Name:		**Matrikelnr.:**	
Vorname:		**Semester:**	
Lehramt? (ja/nein)		**Tutor / Übungsgr.:**	

Wichtige Hinweise:

- ☐ **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**
- ☐ **Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.**
- ☐ **Bitte Namen und Übungsgruppennummer auf jedes Blatt schreiben.**
- ☐ **Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.**
- ☐ **Dieses Blatt mit abgeben.**
- ☐ **Keinerlei Hilfsmittel! Keine Taschenrechner!**
- ☐ **Handys ausschalten und wegpacken!**

***** Rückgabe der Klausur am Montag, dem 19.7.04 in den Übungsgruppen *****
(Gruppenlose bei Philip Howell in der Sprechstunde)
Nachklausur: 14:30–16:30 am Mittwoch, dem 20. Oktober im Gaede-Hörsaal

Bitte wenden: Aufgaben auf der Rückseite $\Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow$

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
korrigiert von					
Punkte					
von maximal	9	7	5	6	27

Üb.	Schein	OP
61		

OP = Klausur wird als erfolgreiche Orientierungsprüfung gewertet (nur 1.–3. Semester)

Klausur Theorie B **SS 2004** **15.7.04**

1 Eine masselose Stange kann frei in der xy-Ebene rotieren; der Winkel mit der x-Achse sei $\phi(t)$. Eine Perle der Masse m bewegt sich frei entlang der Stange. Die Entfernung der Perle vom Ursprung sei $r(t)$. (Es wirkt keine Schwerkraft.)

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion für die Koordinaten r, ϕ an und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Welche physikalische Größe ist erhalten? Benutzen Sie diese, um $\dot{\phi}$ zu eliminieren und zu zeigen, dass $r(t)$ die Differentialgleichung $\ddot{r}\, r^3 = B =$ Konstante erfüllt. (**3** Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $r(t) = \sqrt{a(t+b)^2 + c}$ die Lösung dieser DGL ist, und drücken Sie c durch a und B aus. Benutzen Sie nun die obige Erhaltungsgröße, um die allgemeine Lösung für $\phi(t)$ zu bestimmen. Es gilt $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+A^2} = \frac{1}{A} \arctan \frac{x}{A}$. (**3** Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ sich die Lösung $r(t) = r_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$ und $\phi(t) = \arctan \omega_0 t$ ergibt. (**2** Punkte)
Schreiben Sie dieses Resultat in kartesischen Koordinaten (*Hinweis:* $\tan\phi = \frac{y}{x}$), und erklären Sie das Ergebnis physikalisch. (**1** Punkt)

2 Gegeben sei die Hamilton-Funktion $\mathcal{H} = \dfrac{p_x p_y}{2m} + 2m\omega^2 xy$.

(a) Stellen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen (Hamilton-Gleichungen) auf, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung. (**3** Punkte)

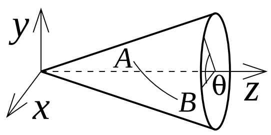
(b) Wie lautet die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$? (**2** Punkte)

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer $\{A, B\} = \sum_i \left[\dfrac{\partial A}{\partial p_i}\dfrac{\partial B}{\partial q_i} - \dfrac{\partial A}{\partial q_i}\dfrac{\partial B}{\partial p_i}\right]$, dass die Größe $R = x^2 + \dfrac{p_y^2}{4m^2\omega^2}$ erhalten ist. (**2** Punkte)

3 **(a)** Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren $\boldsymbol{a}^i$ einer (reellen) symmetrischen Matrix? (**1** Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda = 0, 4, 6$ die Eigenwerte zu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sind, und bestimmen Sie den *normierten* Eigenvektor zu $\lambda = 0$. (**4** Punkte)

4 Gesucht ist die Gleichung für den kürzesten Weg (Geodäte) zwischen zwei Punkten A, B auf der Oberfläche eines Kegels $x = z\cos\theta$, $y = z\sin\theta$.



(a) Zeigen Sie $(\mathrm{d}s)^2 = 2(\mathrm{d}z)^2 + z^2(\mathrm{d}\theta)^2$, wobei d$s$ das Längenelement einer Linie auf der Kegelfläche ist. (**2** Punkte)

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Variationprinzips eine DGL für $\theta(z)$ für die Geodäte, und berechnen Sie deren allgemeine Lösung. Es gilt $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4-u^2}} = \arctan\sqrt{u^2-1}$. (**3** Punkte)
Bringen Sie schließlich das Ergebnis in die Form $z(\theta)$ und vereinfachen Sie die trigonometrischen Funktionen soweit wie möglich. (**1** Punkt)