Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

Theoretische Physik B, SS 2005

1. Klausur, 8. Juni 2005

Dauer: 2 Stunden.
Gesamtpunktzahl: 30 Punkte entspricht einer 100% Lösung. Die mit * gekennzeichneten Aufgaben liefern mögliche Zusatzpunkte, sind aber voraussichtlich etwas aufwendiger.
Hinweise: Beginnen Sie bitte jede Klausuraufgabe auf einem neuen Blatt. **Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** und auf das erste Blatt Ihre Übungsgruppe. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt zugelassen. Die Rückgabe und Besprechung der Klausur findet in den Tutorien am Montag, 13.06.05 statt.

1. Poisson Klammern (5 Punkte)
Berechnen Sie die Poisson Klammern $\{A, B\}$ für
(1a) (2 Punkte) $A = \vec{r}^{\,2}$ und $B = \vec{p}^{\,2}$;
(1b) (3 Punkte) $A = H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\,\vec{r}^{\,2}$ und $B = L_x = r_y p_z - r_z p_y$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

2. Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld (3 + 3 *-Punkte)
Die Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im statischen, homogenen Magnetfeld ohne elektrisches Potential ist

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r})\right)^2$$

Das in z-Richtung zeigende Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z = rot\vec{A}$ ist durch das Vektorpotenzial $A_x = -By$, $A_y = A_z = 0$ gegeben.
(2a) (3 Punkte) Geben Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen an.
(2b)* (3 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass die Bahnen eine Spiralform haben.

3. Massenpunkt auf einer Parabel (10 Punkte)
Ein Massenpunkt mit Masse m ist gezwungen, sich entlang einer Parabel, gegeben durch $z = Cx^2$, reibungslos zu bewegen. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwerkraft.
(3a) (4 Punkte) Formulieren Sie die Zwangsbedingung und schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art für x und z auf. Eliminieren Sie die Zwangskraft und z, um eine Bewegungsgleichung für x zu erhalten.
(3b) (1 Punkt) Betrachten Sie kleine Auslenkungen (nur lineare Terme in der Bewegungsgleichung) und geben Sie dafür die allgemeine Lösung $x(t)$ an.
(3c) (2 Punkte) Wählen Sie x als verallgemeinerte Koordinate und geben Sie die Lagrange-Funktion an. Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art auf.
(3d) (3 Punkte) Finden Sie den kanonischen Impuls zu x und leiten Sie die Hamilton-Funktion her.

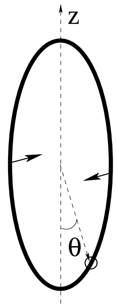

Abbildung 1: Der rotierende Ring.

4. Massenpunkt auf einem rotierenden Ring (5 +2 *-Punkte)
Ein Massenpunkt m bewegt sich reibungsfrei auf einem Ring (siehe Abb. 1) mit Radius R, dessen Ebene mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Richtung rotiert (d.h. der Winkel zwischen der Ebene des Rings und der $x-z$ Ebene ist durch $\phi(t) = \omega t + \phi_0$ gegeben). Außer den dadurch bedingten Zwangskräften soll nur die Schwerkraft auf die Masse wirken. Wir wählen den Winkel θ als verallgemeinerte Koordinate.
(4a) (3 Punkte) Geben Sie die Lagrange-Funktion an.
(4b) (2 Punkte) Was ist die Bewegungsgleichung für θ?
(4c)* (2 Punkte) Was sind die 'stationären' Lösungen (d.h. $\theta = const$)? Beachten Sie, dass für $\omega \geq \sqrt{g/R}$ eine Lösung der Bewegungsgleichung existiert, wo der Massenpunkt bei einem konstanten, von 0 und π verschiedenen Wert von θ verharrt.

5. Optischer Weg (3 + 4 *-Punkte)
Das Fermat'sche Prinzip lautet: die Kurve des Lichtstrahls zwischen den Punkten A und B stellt sich so ein, dass die Ausbreitungszeit minimal ist. Die Geschwindigkeit des Lichts ist $v(\vec{r}) = c/n(\vec{r})$, wobei c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und $n(\vec{r})$ der ortsabhängige Brechungsindex des Materials ist. Betrachten Sie die Lichtausbreitung in der $x-y$ Ebene ($y \geq 0$) für den Fall, dass $n(\vec{r}) = \sqrt{1+\beta y}$ ($\beta > 0$) ist. Der Punkt A sei durch $x_A = 0$, $y_A = 0$ gegeben, der Punkt B hat die Koordinaten x_B und $y_B > 0$.
(5a) (3 Punkte) Stellen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Differentialgleichung für die Kurve her, für die Ausbreitungszeit ein Extremum ist.
(5b)* (2 Punkte) Vereinfachen Sie die Bestimmungsgleichung, indem Sie den Erhaltungssatz verwenden, der aus der Unabhängigkeit von $n(\vec{r})$ von x folgt.
(5c)* (2 Punkte) Setzen Sie als Lösung $y = y_0 + C(x - x_0)^2$ an und finden Sie aus der Differentialgleichung und den Randbedingungen drei Gleichungen für die drei Parameter C, x_0, und y_0. Die explizite Lösung ist nicht verlangt. Zeichnen Sie jedoch die Kurve.

6. Symmetrie und erhaltene Größen (4 Punkte)
(6a) (2 Punkte) Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in 3 Dimensionen. Die potenzielle Energie $U = U(r,z)$ soll nur von z und $r = \sqrt{x^2+y^2}$ abhängen. Geben Sie die Lagrange-Funktion in Zylinder-Koordinaten ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$) an. Finden Sie den Erhaltungssatz, der aus der Unabhängigkeit der potenziellen Energie U von ϕ folgt.
(6b) (2 Punkte) Leiten Sie denselben Erhaltungssatz in der Formulierung des Noether'schen Theorems her.