Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/˜shnirman

Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zur 1. Klausur

Besprechung: 13/06/2005

1. Poisson Klammern
Die Poisson Klammern sind definiert als

$$\{A, B\} = \sum_j \left[\frac{\partial A}{\partial r_j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial r_j} \right]$$

Dann gilt
a)

$$\{(\vec{r})^2, (\vec{p})^2\} = \sum_j \left[\frac{\partial(\vec{r})^2}{\partial r_j}\frac{\partial(\vec{p})^2}{\partial p_j} - \frac{\partial(\vec{r})^2}{\partial p_j}\frac{\partial(\vec{p})^2}{\partial r_j} \right] = \sum_j 2r_j \cdot 2p_j = 4(\vec{r}\vec{p})$$

b)

$$\{H, L_x\} = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial r_j}\frac{\partial L_x}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial L_x}{\partial r_j} \right] =$$

$$= m\omega_0^2 \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r_z \\ r_y \end{pmatrix} - \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0$$

Da $(d/dt)L_x = \{L_x, H\} = 0$, ist der Drehimpuls in x-Richtung erhalten.

2. Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld
2a) Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{(p_x + (q/c)By)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

Wie führen $D = (q/c)B$ ein. Die Hamilton-Gleichungen lauten

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x + Dy}{m} \tag{1}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \tag{2}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \tag{3}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -D\,\frac{p_x + Dy}{m} \tag{5}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

2b) p_z ist erhalten. Aus Gl. (3) folgt damit für die Bewegung in z-Richtung einfach $z = v_z t + const$, wobei $v_z = p_z/m$. Außerdem ist p_x erhalten, aber nicht $\dot{x}$ (siehe Gl. (1)).
Um die Bewegung in der $x - y$ Ebene zu bestimmen, differenzieren wir Gl. (2) und setzen danach Gl. (5) ein. Das ergibt

$$\ddot{y} = \frac{\dot{p}_y}{m} = -D\,\frac{p_x + Dy}{m^2}$$

Da p_x erhalten ist, können wir jetzt $y(t)$ bestimmen. Die allgemeine Lösung lautet

$$y = A\cos\left(\frac{D}{m}t + \phi\right) - \frac{p_x}{D}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten A und ϕ.
Um $x(t)$ zu bestimmen integrieren wir Gl. (1). Das ergibt

$$x = A\sin\left(\frac{D}{m}t + \phi\right) + C$$

wobei C noch eine zubestimmende Konstante ist.
In der $x - y$ Ebene dreht sich das Teilchen im Kreis. Der Radius des Kreises ist A und das Zentrum des Kreises ist durch $x_c = C$, $y_c = -p_y/D$ gegeben. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega_c = D/m = qB/(cm)$.

3. Massenpunkt auf einer Parabel

3a) Die Zwangsbedingung lautet $F(x, z) = Cx^2 - z = 0$.
Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten dann

$$m\ddot{x} = \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda Cx \tag{7}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = -mg - \lambda \tag{8}$$

$$z = Cx^2 \tag{9}$$

Aus Gl. (9) folgt $\dot{z} = 2Cx\dot{x}$ und $\ddot{z} = 2Cx\ddot{x} + 2C\dot{x}^2$. Wir setzen dies in Gl. (8) ein. Das ergibt

$$\lambda = -mg - 2mCx\ddot{x} - 2mC\dot{x}^2$$

Wir setzen dies in Gl. (7) ein. Das ergibt

$$\ddot{x} = \frac{2\lambda Cx}{m} = -2gCx - 4C^2x^2\ddot{x} - 4C^2x\dot{x}^2 \tag{10}$$

3b) Für kleine Auslenkungen vernachlässigen wir die nichtlinearen Terme der Gl. (10). Dann gilt

$$\ddot{x} = -2gCx$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x = A\cos(\sqrt{2gC}\,t + \phi)$$

wobei A und ϕ zu bestimmende Konstanten sind.
3c) Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{m}{2}\,(1 + 4C^2x^2)\,\dot{x}^2$$

Die potenzielle Energie ist

$$U = mgz = mgCx^2$$

Dann lautet die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m}{2}\,(1 + 4C^2x^2)\,\dot{x}^2 - mgCx^2$$

Die Bewegungsgleichung (die Lagrange-Gleichung 2. Art) lautet

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\Big(m(1 + 4C^2x^2)\dot{x}\Big) - 4mC^2x\dot{x}^2 + 2mgCx$$

Wir differenzieren und kürzen durch m

$$(1 + 4C^2x^2)\ddot{x} + 8C^2x\dot{x}^2 - 4C^2x\dot{x}^2 + 2gCx = 0$$

Die Gleichung reduziert sich auf Gl. (10)
3d) Der kanonische Impuls ist

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4C^2x^2)\dot{x}$$

Wir drücken die Geschwindigkeit $\dot{x}$ durch den Impuls aus

$$\dot{x} = \frac{p}{m(1 + 4C^2x^2)}$$

Die Hamilton-Funktion lautet dann

$$\begin{aligned} H = p\dot{x} - L &= \frac{p^2}{m(1 + 4C^2x^2)} - \frac{m}{2}\,(1 + 4C^2x^2)\,\left(\frac{p}{m(1 + 4C^2x^2)}\right)^2 + mgCx^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{p^2}{m(1 + 4C^2x^2)} + mgCx^2 \end{aligned}$$

4. Massenpunkt auf einem rotierenden Ring

4a) Wir benutzen als veralgemeinerte Koordinaten r, θ, und ϕ mit $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = -r\cos\theta$. (Ähnlich zu Kugel-Koordinaten, aber θ wird von der negative z-Achse ausgemessen.) Durch die Zwangsbedingungen $r = R = const$ und $\dot{\phi} = \omega = const$. Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta)$$

Die potenzielle Energie lautet

$$U = mgz = -mgR\cos\theta$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - U = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) + mgR\cos\theta$$

4b) Die Bewegungsgleichung (die Lagrange-Gleichung 2. Art) lautet

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\ddot{\theta} - mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta$$

Der zweite Term ist die Zentrifugalkraft. Schließlich lautet die Bewegungsgleichung

$$R\ddot{\theta} - R\omega^2 \sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

4c) Wir suchen nach den stationären Lösungen $\theta = const.$ Dann gilt $\ddot{\theta} = 0$ und

$$R\omega^2 \sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0$$

Eine Lösung dieser Gleichung lautet $\sin\theta = 0$. Dann gilt $\theta = 0$ *oder* $\theta = \pi$. Die andere Lösung ist durch

$$R\omega^2 \cos\theta - g = 0$$

gegeben. Da $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, existiert die Lösung nur wenn $\omega \geq \sqrt{g/R}$.

5. Optischer Weg

5a) Die Ausbreitungszeit lautet

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v(\vec{r})}$$

Für das Differenzial der Länge der Kurve gilt $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + y'^2)dx^2$. Also

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Dann gilt

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{v(\vec{r})} = \frac{1}{c}\int_{x_A}^{x_B} dx\, n(y)\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{c}\int_{x_A}^{x_B} dx\, F(y, y')$$

Wir wollen T minimieren. Die Bedingung des Extremums ist durch die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

gegeben. Da $F = n(y)\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{(1+\beta y)(1+y'^2)}$ lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'\sqrt{1+\beta y}}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{\beta\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{1+\beta y}}$$

Differenzieren ergibt

$$\frac{y''\,\sqrt{1+\beta y}}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2\,y''\,\sqrt{1+\beta y}}{(\sqrt{1+y'^2})^3} + \frac{y'^2\,\beta}{2\sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+\beta y}} = \frac{\beta\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{1+\beta y}}$$

Die Gleichung läßt sich vereinfachen

$$2y''(1+\beta y) = \beta(1+y'^2) \tag{11}$$

5b) Statt Gl. (11) zu integrieren, benutzen wir den Erhaltungssatz, der aus der Unabhängigheit von $F(y,y')$ von x folgt. Der Erhaltungssatz lautet

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\,y' - F = const.$$

Das ergibt

$$\sqrt{\frac{1+\beta y}{1+y'^2}} = const.$$

und schließlich

$$K(1+\beta y) = 1+y'^2$$

wobei K eine positive zubestimmende Konstante ist.

5c) Wir setzen jetzt die Probelösung $y = y_0 + C(x-x_0)^2$ ein. Die Bedingung, dass die Probelösung eine Lösung ist, erfordert $K(1+\beta y_0) = 1$ und $K\beta C = 4C^2$. Wir eliminieren K und erhalten die Bedingung

$$4C(1+\beta y_0) = \beta \tag{12}$$

Die Bedingung, dass der Punkt A=(0,0) auf der Kurve liegen muss, ergibt

$$y_0 + Cx_0^2 = 0\ . \tag{13}$$

Analog ergibt die Bedingung, dass der Punkt B auf der Kurve liegt

$$y_0 + C(x_B - x_0)^2 = y_B\ . \tag{14}$$

Also, haben wir 3 Gleichungen (12,13,14) für die 3 zubestimmenden Parameter C, x_0, y_0. Aus Gl. (13) sieht man, dass $y_0 < 0$. Wenn wir, z.B., den Fall $x_B > 0$ betrachten, dann sieht man aus Gl. (13) und Gl. (14), dass $x_0 < 0$. Dieser Fall ist in Abb. 1 skizziert.

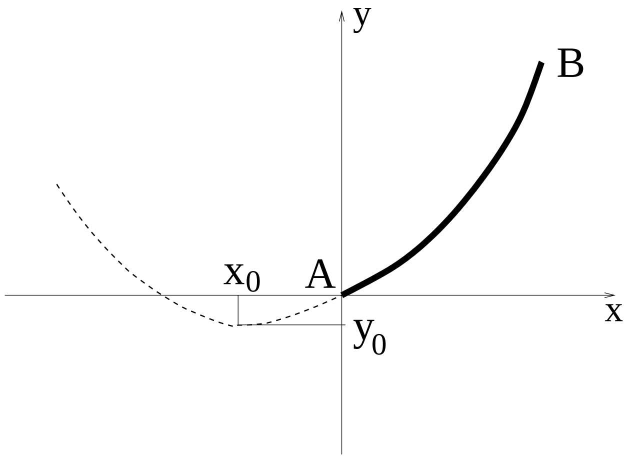

Abbildung 1: Ausbreitungskurve.

6. Symmetrie und erhaltene Größen
6a) In Zylinder-Koordinaten lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

Die Lagrange-Funktion lautet $L = T - U$. Da U unabhängig von ϕ ist, ist der kanonische Impuls p_ϕ erhalten. Das folgt aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

Der erhaltene Impuls $p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ ist also

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}$$

6b) Im Noether'schen Theorem betrachtet man infinitesimale Transformationen, die die Lagrange-Funktion nicht ändern. Hier lautet die entsprechende Transformation $(r, \phi, z) \to (r(\epsilon), \phi(\epsilon), z(\epsilon)) = (r+\delta r, \phi+\delta\phi, z+\delta z)$ mit $(\delta r, \delta\phi, \delta z) = (0, \epsilon, 0)$, wobei ϵ eine infinitesimale Zahl ist. Dann besagt das Noether'sche Theorem, dass

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\delta z\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\frac{\partial r}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\frac{\partial z}{\partial \epsilon}\right]\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\epsilon = 0\ . \tag{15}$$

Dann sieht man, dass p_ϕ erhalten ist. Es ist auch klar, dass p_ϕ gleich der z Komponente des Drehimpulses ist

$$p_\phi = L_z = mx\dot{y} - my\dot{x}$$