

Theoretische Physik B, SS 2005

2. Klausur, 6. Juli 2005

Dauer: 2 Stunden. Gesamtpunktzahl: 30 Punkte entspricht einer 100% Lösung. Die mit * gekennzeichneten Aufgaben liefern mögliche Zusatzpunkte, sind aber voraussichtlich etwas aufwendiger. Hinweise: Beginnen Sie bitte jede Klausuraufgabe auf einem neuen Blatt. **Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** und auf das erste Blatt Ihre Übungsgruppe. Die Rückgabe und Besprechung der Klausur findet in den Tutorien am Montag, 11.07.05 statt.

1. Atwood'sche Fallmaschine mit einer massiven Rolle (6 Punkte)

Betrachten Sie die Atwood'sche Fallmaschine. Die Massen m_1 und m_2 sind durch eine Schnur verbunden, die über die Rolle der Masse M , der Länge L und des Radius R gewickelt ist (siehe Abb. 1). Auf die Massen wirkt die Schwerkraft. Die Achse der Rolle bleibt fest.

(1a) (3 Punkte) Wählen Sie die Höhe der Masse m_1 als verallgemeinerte Koordinate und geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an. Wie lautet die Bewegungsgleichung?

(1b) (3 Punkte) Finden Sie die Zwangskräfte, die auf die Massen wirken und das Drehmoment, das auf die Rolle wirkt.

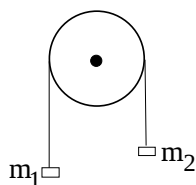


Abbildung 1: die Fallmaschine

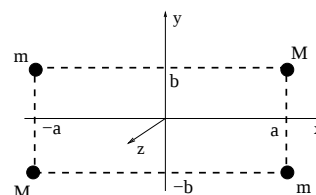


Abbildung 2: die Massen

2. Trägheitstensor (7 Punkte)

Gegeben sind vier Massen in der $x-y$ Ebene. Zwei Massen M befinden sich in den Punkten $(x, y, z) = (a, b, 0)$ und $(x, y, z) = (-a, -b, 0)$. Zwei Massen m befinden sich in den Punkten $(x, y, z) = (-a, b, 0)$ und $(x, y, z) = (a, -b, 0)$ (siehe Abb. 2).

(2a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Koordinatensystems (x, y, z) .

(2b) (3 Punkte) Finden Sie die Hauptträgheitsmomente.

(2c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die z -Achse eine der Hauptachsen ist. Bestimmen Sie die Richtungen (z.B. den Winkel mit der x -Achse) der beiden anderen Hauptachsen in der $x-y$ Ebene im allgemeinen Fall. Finden Sie die Hauptachsen in zwei speziellen Fällen: (i) $M \neq m$ und $a = b$; (ii) $M = m$ und $a \neq b$.

3. Hamilton-Funktion $\rightarrow$ Lagrange-Funktion (5 Punkte)

Die Hamilton-Funktion eines Teilchens in 2 Dimensionen ist $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + ap_x p_y + U(x, y)$

(3a) (2 Punkt) Stellen Sie die Hamilton'sche Bewegungsgleichungen auf.

(3b) (3 Punkte) Finden Sie die entsprechende Lagrange-Funktion $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

4. Geodäte (6 Punkte)

Gesucht ist die Gleichung für den kürzesten Weg (Geodäte) zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche eines Paraboloids. In Zylinder-Koordinaten (r, ϕ, z) ist das Paraboloid durch $z = ar^2$ gegeben ($a > 0$). Eine Linie auf der Oberfläche kann durch eine Funktion $r(\phi)$ parametrisiert werden.

(4a) (3 Punkte) Stellen Sie das Funktional auf, das die Länge der Linie bestimmt. (Hinweis: Das Differenzial der Länge in Zylinder-Koordinaten ist $dl^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2$.) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Geodäte (Vereinfachung wird nicht verlangt).

(4b) (3 Punkte) Finden Sie einen "Erhaltungssatz" und verwenden Sie diesen, um eine einfachere Gleichung für die Geodäte zu erhalten.

5. Zylinder in einem Hohlzylinder (6 Punkte)

Ein Zylinder der Masse m , des Radius r , und der Länge l rollt in einem Hohlzylinder mit Radius $R > r$ (siehe Abb. 3). Auf den kleinen Zylinder wirkt die Schwerkraft.

(5a) (3 Punkte) Wählen Sie den Winkel θ als verallgemeinerte Koordinate und geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an. (Hinweis: Die Winkelgeschwindigkeit des kleinen Zylinders lässt sich als v/r berechnen, wobei v die Schwerpunktschwindigkeit ist.) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

(5b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung dem Satz $(d/dt)\vec{L} = \vec{N}$ entspricht. (Hinweis: Berechnen Sie $\vec{L}$ und $\vec{N}$ bezüglich der Linie, in der sich die beiden Zylinder berühren und verwenden Sie den Steiner'schen Satz.)

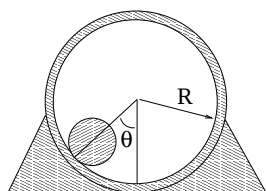


Abbildung 3: Zylinder im Hohlzylinder

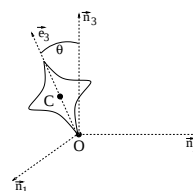


Abbildung 4: Kreisel

6. Präzession durch die Euler Gleichungen (9* Punkte)

Betrachten Sie einen symmetrischen Kreisel ($I_1 = I_2 \neq I_3$). Die Spitze des Kreisels bleibt fest im Ursprung O des Koordinatensystems (siehe Abb. 4). Die Masse des Kreisels ist m und der Abstand zwischen O und dem Schwerpunkt des Kreisels C ist $|OC| = l$. Auf den Kreisel wirkt die Schwerkraft. Wir benutzen die Eulergleichungen $N_1 = I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3$, $N_2 = I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1$, $N_3 = I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2$, um die Bewegung des Kreisels zu bestimmen. Beachten Sie, dass diese Gleichungen im körperfesten (bewegten) Koordinatensystem gelten. Wir wollen die Schwerkraft als kleine Störung betrachten.

6a) (3* Punkte) Betrachten Sie als erste Näherung die stationäre Lösung $\Omega_3 > 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, die für den Fall ohne die Schwerkraft ($g = 0 \rightarrow \vec{N} = 0$) gilt. Nehmen Sie an, dass die Achse $\vec{e}_3$ horizontal entlang $\vec{n}_2$ ausgerichtet ist. Finden Sie die zeitabhängigen Richtungen der $\vec{e}_1$ - und $\vec{e}_2$ -Achsen im raumfesten Koordinatensystem. Geben Sie die Komponenten N_1, N_2, N_3 des Drehmoments im körperfesten KS an.

6b) (3* Punkte) Betrachten Sie zunächst das Drehmoment $\vec{N}$ als kleine Störung und finden Sie die Korrektur $\delta\vec{\Omega} = (\delta\Omega_1, \delta\Omega_2, \delta\Omega_3)$, die durch $\vec{N}$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $\delta\Omega_3(t) = 0$ und bestimmen Sie $\delta\Omega_1(t)$ und $\delta\Omega_2(t)$ mit Hilfe der Euler-Gleichungen.

6c) (3* Punkte) Drücken Sie die Korrektur $\delta\vec{\Omega}$ im raumfesten Koordinatensystem aus. Beschreiben Sie die Bewegung des Kreisels.