Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/˜shnirman

Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zur 2. Klausur

Besprechung: 11/07/2005

1. Atwood'sche Fallmachine mit einer massiven Rolle
(1a) Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2} + \frac{I\dot{\phi}^2}{2}$$

Die Zwangsbedingungen liefern

$$z_2 = const - z_1 \quad \dot{z}_2 = -\dot{z}_1$$

und

$$R\dot{\phi} = \dot{z}_1$$

Dann gilt

$$T = \frac{(m_1 + m_2)\dot{z}_1^2}{2} + \frac{I\dot{z}_1^2}{2R^2}$$

Das Trägheitsmoment des Zylinders ist durch $I = MR^2/2$ gegeben. Dann gilt

$$T = \frac{(m_1 + m_2 + M/2)\dot{z}_1^2}{2}$$

Die potenzielle Energie lautet

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = (m_1 - m_2) g z_1 + const$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T - U = \frac{(m_1 + m_2 + M/2)\dot{z}_1^2}{2} - (m_1 - m_2) g z_1$$

Für die Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = \frac{\partial L}{\partial z_1}$ erhalten wir

$$(m_1 + m_2 + M/2)\ddot{z}_1 = -(m_1 - m_2) g$$

Die Beschleunigung ist

$$\ddot{z}_1 = -\frac{(m_1 - m_2) g}{(m_1 + m_2 + M/2)}$$

(1b)
Die Kraft K_1, die auf m_1 wirkt ergibt sich aus

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + K_1$$

Das ergibt

$$K_1 = \frac{2m_1 m_2 + m_1 M/2}{m_1 + m_2 + M/2}\, g$$

Analog erhalten wir

$$K_2 = \frac{2m_1 m_2 + m_2 M/2}{m_1 + m_2 + M/2}\, g$$

Das Drehmoment ist

$$N = R(K_2 - K_1) = \frac{(m_2 - m_1)M/2}{m_1 + m_2 + M/2}\, gR$$

Alternativ können wir das Drehmoment aus der Relation $\dot{L} = I\ddot{\phi} = N$ bestimmen und finden dasselbe Ergebnis.

2. Trägheitstensor
(2a) Wir erhalten

$$I_{xx} = 2(m+M)b^2 \qquad I_{yy} = 2(m+M)a^2 \qquad I_{zz} = 2(m+M)(a^2+b^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = 2ab(m-M)$$

Alle andere Elemente sind 0.
Also lautet der Trägheitstensor

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2b^2(m+M) & 2ab(m-M) & 0 \\ 2ab(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M)(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

(2b) Es ist klar, dass $I_3 = I_{zz} = 2(m+M)(a^2+b^2)$. Um I_1 und I_2 zu finden müssen wir die folgende Gleichung lösen

$$det \begin{pmatrix} 2b^2(m+M) - I_k & 2ab(m-M) \\ 2ab(m-M) & 2a^2(m+M) - I_k \end{pmatrix} = 0$$

Das ergibt

$$I_k^2 - 2(a^2+b^2)(m+M)I_k + 16a^2b^2Mm = 0$$

und

$$I_{1/2} = (a^2+b^2)(m+M) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2(m+M)^2 - 16a^2b^2Mm}$$

(2c) Da $\hat{I}$ block-diagonal ist, ist der Vektor $(0,0,1)$ ein Eigenvektor mit dem Eigenwert I_3. Die beiden anderen Eigenvektoren ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} 2b^2(m+M) - I_k & 2ab(m-M) \\ 2ab(m-M) & 2a^2(m+M) - I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\tan\alpha_k = \frac{y_k}{x_k} = \frac{2b^2(m+M) - I_k}{2ab(M-m)}$$

wobei ist α_k der Winkel zwischen der Hauptachse k und der x-Achse. Das ergibt

$$\tan\alpha_k = \frac{(b^2-a^2)(m+M) \mp \sqrt{(a^2+b^2)^2(m+M)^2 - 16a^2b^2Mm}}{2ab(M-m)}$$

Für $a = b$ ergibt dies $\tan\alpha_k = \pm 1$. Die Hauptachsen sind also die Diagonalen des Quadrats. Für $M = m$ erhalten wir $\tan\alpha_k = 0, \infty$. Die Hauptachsen sind also die x- und y-Achsen.

3. Hamilton-Funktion → Lagrange-Funktion
(3a) Die Hamilton'sche Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + ap_y$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} + ap_x$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

(3b)
Wir benutzen Matrizen

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix} \hat{T} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + U(x,y)$$

wobei

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1/m & a \\ a & 1/m \end{pmatrix}$$

Die zwei ersten Hamilton'schen Gleichungen lauten dann

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Da

$$H = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} - L$$

gilt

$$L = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} - H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - U$$

Die invertierte Matrix lautet

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{1/m^2 - a^2}\begin{pmatrix} 1/m & -a \\ -a & 1/m \end{pmatrix} = \frac{1}{1-m^2a^2}\begin{pmatrix} m & -am^2 \\ -am^2 & m \end{pmatrix}$$

Schließlich lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2(1-m^2a^2)} + \frac{m\dot{y}^2}{2(1-m^2a^2)} - \frac{am^2\dot{x}\dot{y}}{(1-m^2a^2)} - U(x,y)$$

4. Geodäte
(4a) Da $z = ar^2$ gilt

$$dz = 2ardr$$

Dann

$$dl^2 = r^2 d\phi^2 + (1+4a^2r^2)dr^2$$

Die Linie ist durch $r(\phi)$ parametrisiert. Mit $dr/d\phi = r'$ gilt

$$dl = d\phi\sqrt{r^2 + (1+4a^2r^2)r'^2}$$

Das Funktional, das die Länge der Linie bestimmt, lautet

$$L = \int d\phi F(r,r')$$

wobei

$$F(r,r') = \sqrt{r^2 + (1+4a^2r^2)r'^2}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{d\phi}\frac{\partial F}{\partial r'} = \frac{\partial F}{\partial r}$$

Das ergibt

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{(1+4a^2r^2)r'}{\sqrt{r^2+(1+4a^2r^2)r'^2}}\right) = \frac{(1+4a^2r'^2)r}{\sqrt{r^2+(1+4a^2r^2)r'^2}}$$

Nach der (nicht verlangten) Vereinfachung ergibt das

$$\frac{r[rr''(1+4a^2r^2) - 2r'^2(1+2a^2r^2) - r^2]}{(r^2+(1+4a^2r^2)r'^2)^{3/2}} = 0$$

(4b) Da F unabhängig von ϕ ist, ergibt sich der "Erhaltungssatz"

$$r'\frac{\partial F}{\partial r'} - F = const$$

Dann

$$\frac{(1+4a^2r^2)r'^2}{\sqrt{r^2+(1+4a^2r^2)r'^2}} - \sqrt{r^2+(1+4a^2r^2)r'^2} = const$$

Daraus folgt

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2+(1+4a^2r^2)r'^2}} = const$$

Die Differenzialgleichung, also, lautet

$$r'^{\,2} = \frac{cr^4 - r^2}{1 + 4a^2r^2}$$

wobei c eine zu bestimmende Konstante ist ($c > 0$).

5. Zylinder in einem Hohlzylinder

(5a) Die kinetische Energie T besteht aus der Schwerpunktsenergie T_C und der Rotationsenergie T_R. Es gilt

$$T_C = \frac{mv^2}{2}$$

wobei $v = (R - r)\dot{\theta}$. Also gilt

$$T_C = \frac{m(R - r)^2\dot{\theta}^2}{2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des kleinen Zylinders ist

$$\Omega = \frac{v}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\theta}$$

Dann lautet die Rotationsenergie

$$T_R = \frac{I\Omega^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{(R - r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2 = \frac{m(R - r)^2\dot{\theta}^2}{4}$$

Die gesamte kinetische Energie ist dann

$$T = \frac{3m(R - r)^2\dot{\theta}^2}{4}$$

Die potenzielle Energie ergibt sich als

$$U = mgz = -mg(R - r)\cos\theta + const$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\theta} = -mg(R - r)\sin\theta$$

oder

$$\frac{3}{2}(R - r)\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

(5b) Der Drehmoment bezüglich der Berührenslinie ist

$$N = -mgr\sin\theta$$

Das Drehimpuls bezüglich derselben Linie lautet

$$L = I'\Omega$$

wobei nach dem Steiner'schen Satz $I' = I + mr^2 = (3/2)mr^2$
Also gilt

$$L = \frac{3}{2}mr^2\frac{R - r}{r}\dot{\theta}$$

Wir benutzen $\dot{L} = N$ und erhalten dieselbe Bewegungsgleichung wie in **(5a)**

6. Präzession durch die Euler Gleichungen
(6a)
Bei $t = 0$ haben wir
$$\vec{e}_1 = \vec{n}_z \qquad \vec{e}_2 = \vec{n}_x \qquad \vec{e}_3 = \vec{n}_y$$
Dann für $t > 0$ gilt
$$\vec{e}_1 = \cos \Omega_3 t \, \vec{n}_z + \sin \Omega_3 t \, \vec{n}_x$$
$$\vec{e}_2 = -\sin \Omega_3 t \, \vec{n}_z + \cos \Omega_3 t \, \vec{n}_x$$
Die Schwerkraft lautet $K = -mg\vec{n}_z$. Das Drehmoment lautet
$$\vec{N} = l\vec{n}_y \times \vec{K} = -mgl\vec{n}_x$$
Wir drücken $\vec{n}_x$ durch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aus:
$$\vec{n}_x = \sin \Omega_3 t \, \vec{e}_1 + \cos \Omega_3 t \, \vec{e}_2$$
Also
$$\vec{N} = -mgl(\sin \Omega_3 t \, \vec{e}_1 + \cos \Omega_3 t \, \vec{e}_2)$$
(6b)
Da $N_3 = 0$ und $I_1 = I_2$ besagt die dritte Euler Gleichung, dass $\dot{\Omega}_3 = 0$. Also $\delta\Omega_3 = 0$. Die zwei anderen Euler Gleichungen lauten jetzt
$$A\Omega_2 + I_1\dot{\Omega}_1 = -mgl \sin \Omega_3 t$$
$$-A\Omega_1 + I_1\dot{\Omega}_2 = -mgl \cos \Omega_3 t$$
wobei $A \equiv (I_3 - I_1)\Omega_3$ (Ω_3 ist erhalten, deswegen sind die zwei Gleichungen linear).
Wir versuchen den Ansatz
$$\Omega_1 = a \cos \Omega_3 t + b \sin \Omega_3 t$$
$$\Omega_2 = c \cos \Omega_3 t + d \sin \Omega_3 t$$
Dann gilt $c = b = 0$. Für a und d erhalten wir
$$a = \frac{mgl}{I_3\Omega_3}$$
$$d = -\frac{mgl}{I_3\Omega_3}$$
Dann gilt
$$\delta\vec{\Omega} = \frac{mgl}{I_3\Omega_3}(\cos \Omega_3 t \, \vec{e}_1 - \sin \Omega_3 t \, \vec{e}_2)$$
(6c) Im raumfesten Koordinatensystem ergibt das
$$\delta\vec{\Omega} = \frac{mgl}{I_3\Omega_3}\vec{n}_z$$