Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zur Nachklausur

1. Lagrange-Funktion → Hamilton-Funktion
(1a) Die erste Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \ .$$

Das ergibt

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} + a\dot{y}) = m\ddot{x} + a\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \ .$$

Analog lautet die zweite Bewegungsgleichung

$$m\ddot{y} + a\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \ .$$

(1b)
Wir benutzen Matrizen

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - U(x,y)$$

wobei

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} m & a \\ a & m \end{pmatrix} \ .$$

Die verallgemeinerte Impulse lauten dann

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial L/\partial \dot{x} \\ \partial L/\partial \dot{y} \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \ .$$

Da

$$H = \begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - L$$

und

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

gilt

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + U \ .$$

Die invertierte Matrix lautet

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{m^2 - a^2} \begin{pmatrix} m & -a \\ -a & m \end{pmatrix} \ .$$

Schließlich lautet die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{mp_x^2}{2(m^2 - a^2)} + \frac{mp_y^2}{2(m^2 - a^2)} - \frac{ap_x p_y}{(m^2 - a^2)} + U(x, y) \ .$$

2. Kleine Schwingungen

(2a) Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{k_1}{2}(x_1 - x_2)^2 \ .$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich als

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_1(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k_1(x_1 - x_2) \ .$$

(2b) Aus Symmetrie-Gründen wird klar, dass die Eigenmoden die Summe $q_1 = x_1 + x_2$ und die Differenz $q_2 = x_1 - x_2$ sind. Die Summe der zwei Bewegungsgleichungen lautet

$$m\ddot{q}_1 = -kq_1 \ .$$

Also, ergibt sich die Eigenfrequenz der ersten Eigenmode als $\omega_1^2 = k/m$.
Analog lautet die Differenz der Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{q}_2 = -(k + 2k_1)q_2 \ .$$

Die zweite Eigenfrequenz ist dann $\omega_2^2 = (k + 2k_1)/m$.

(2c) Wir stellen die Lagrangefunktion in der Matrix-Form dar

$$L = \frac{1}{2}(T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_i x_j)$$

wobei

$$T = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$V = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$T_{ij}\ddot{x}_j - V_{ij}x_j = 0 \ .$$

Die Eigenfrequenzen werden aus der folgenden Gleichung gefunden

$$\det(V - \omega^2 T) = 0 \ .$$

Das ergibt

$$\det \begin{pmatrix} k + k_1 - \omega^2 m & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

und

$$k + k_1 - \omega^2 m = \pm k_1 \ .$$

Daraus ergeben sich die Eigenfrequenzen als

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

und

$$\omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m} \ .$$

Als nächstes bestimmen wir die Eigenvektoren aus

$$(V - \omega_n^2 T)_{ij} a_{jn} = 0 \ .$$

Für $n = 1$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ ergibt das

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Also $a_{11} = a_{21}$. Analog erhalten wir für $n = 2$ die Relation $a_{12} = -a_{22}$.

3. Fallmaschine mit einer massiven Rolle

3a) Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I \dot{\phi}^2}{2}$$

Die Zwangsbedingungen liefern

$$x_2 = const + z_1 \quad \dot{x}_2 = \dot{z}_1$$

und

$$R\dot{\phi} = \dot{z}_1$$

Dann gilt

$$T = \frac{(m_1 + m_2)\dot{z}_1^2}{2} + \frac{I \dot{z}_1^2}{2R^2}$$

Das Trägheitsmoment des Zylinders ist durch $I = MR^2/2$ gegeben. Dann gilt

$$T = \frac{(m_1 + m_2 + M/2)\dot{z}_1^2}{2}$$

Die potenzielle Energie lautet

$$U = m_1 g z_1$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T - U = \frac{(m_1 + m_2 + M/2)\dot{z}_1^2}{2} - m_1 g z_1$$

Für die Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = \frac{\partial L}{\partial z_1}$ erhalten wir

$$(m_1 + m_2 + M/2)\ddot{z}_1 = -m_1 g$$

Die Beschleunigung ist

$$\ddot{z}_1 = -\frac{m_1 g}{(m_1 + m_2 + M/2)}$$

(3b)
Die Kraft K_1, die auf m_1 wirkt ergibt sich aus

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + K_1$$

Das ergibt

$$K_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 M/2}{m_1 + m_2 + M/2}\, g$$

Analog erhalten wir

$$K_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\, g$$

Das Drehmoment ist

$$N = R(|K_2| - |K_1|) = -\frac{m_1 M/2}{m_1 + m_2 + M/2}\, gR$$

Wir sehen auch, dass $\dot{L} = I\ddot{\phi} = N$.

4. Trägheitstensor
(4a) Erst bestimmen wir die Position des Schwerpunktes. Wir erhalten

$$x_c = \frac{2m \cdot 2a + m \cdot 0 + m \cdot 0}{4m} = a$$

und

$$y_c = \frac{m \cdot 4a + 2m \cdot 0 + m \cdot 0}{4m} = a\ .$$

Also befindet sich der Schwerpunkt am Ort $(a, a, 0)$.
Für die Matrixelemente des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunkts erhalten wir dann

$$I_{zz} = [m(3a)^2 + ma^2] + [ma^2 + ma^2] + [2ma^2 + 2ma^2] = 16ma^2\ ,$$

$$I_{xx} = 16ma^2 - ma^2 - ma^2 - 2ma^2 = 12ma^2\ ,$$

$$I_{yy} = 16ma^2 - m(3a)^2 - ma^2 - 2ma^2 = 4ma^2\ ,$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -(-3ma^2 + ma^2 - 2ma^2) = 4ma^2\ .$$

Alle andere Elemente sind 0.
Also lautet der Trägheitstensor

$$\hat{I} = 4ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4b) Es ist klar, dass $I_3 = I_{zz} = 16ma^2$. Um I_1 und I_2 zu finden müssen wir die folgende Gleichung lösen

$$det \begin{pmatrix} 3 - i_k & 1 \\ 1 & 1 - i_k \end{pmatrix} = 0$$

mit $I_k = 4ma^2 i_k$. Das ergibt

$$i_k^2 - 4i_k + 2 = 0 \ ,$$
$$i_k = 2 \pm \sqrt{2} \ ,$$

und

$$I_{1/2} = 4ma^2(2 \pm \sqrt{2}) \ .$$

(4c) Da $\hat{I}$ blockdiagonal ist, ist der Vektor $(0, 0, 1)$ ein Eigenvektor mit dem Eigenwert I_3. Die beiden anderen Eigenvektoren ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} 3 - i_k & 1 \\ 1 & 1 - i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

und wir erhalten

$$\tan \alpha_k = \frac{y_k}{x_k} = i_k - 3$$

wobei α_k der Winkel zwischen der Hauptachse k und der x-Achse ist. Das ergibt

$$\tan \alpha_1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\tan \alpha_2 = -\sqrt{2} - 1$$

5. Corioliskraft und Zentrifugalkraft

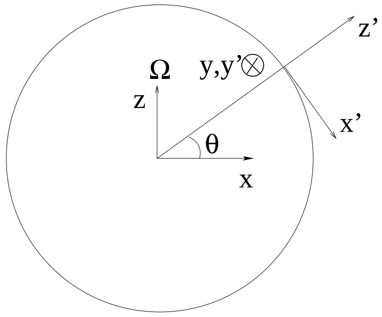

Abbildung 1: die Erde.

Die Corioliskraft ist

$$K_C = 2m\,\vec{v} \times \vec{\Omega} \ .$$

Die Zentrifugalkraft ist

$$K_Z = m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) \ .$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ ist

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = -\Omega \cos\theta \vec{e}_{x'} + \Omega \sin\theta \vec{e}_{z'}$$

(a)
Für die Bewegung in die x'-Richtung (von Süden nach Norden) gilt $\vec{v} = -v\vec{e}_{x'}$ und

$$K_C = 2m\Omega v \sin\theta \vec{e}_y$$

Da die Kraft positiv ist, ist sie nach Osten ausgerichtet.
Um die Zentrifugalkraft zu bestimmen brauchen wir $\vec{r} = R\vec{e}_{z'}$, wobei R der Radius der Erde ist. Dann gilt

$$K_Z = m\Omega^2 R \cos\theta [\cos\theta \vec{e}_{z'} + \sin\theta \vec{e}_{x'}] = m\Omega^2 R \cos\theta \vec{e}_x$$

(b)
Für die Bewegung in die y-Richtung (von Westen nach Osten) gilt $\vec{v} = v\vec{e}_y$ und

$$K_C = -2m\Omega v \vec{e}_x = -2m\Omega v \left[\cos\theta \vec{e}_{z'} + \sin\theta \vec{e}_{x'}\right]$$

Die Zentrifugalkraft ist dieselbe wie in **(a)**